گسسته ـ فصل احتمال

عطا صادقی ـ احسان موسوی

تهران

انتشارات علمی فار

سرشناسه: صادقی، عطاءالله ۱۳۵۴ ـ
عنوان و نام پدیدآور: گسسته ـ فصل احتمال / عطا صادقی، احسان موسوی.
مشخصات نشر: تهران: انتشارات علمی فار، ۱۳۸۹.
مشخصات ظاهری: ۵۶ ص.: مصور، جدول.
شابک: رایگان: 978-600-91181-8-2
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
یادداشت: عنوان دیگر: گسسته احتمال ـ مشت نمونه‌ی خروار.
یادداشت: کتاب حاضر راهنمای فصل احتمال از کتاب «ریاضیات گسسته و جبر و احتمال» تألیف عطا صادقی، احسان موسوی، با هم‌کاری مهسا ابراهیمی، آیلا احمدی از انتشارات علمی فار است.
عنوان دیگر: ریاضیات گسسته و جبر و احتمال.
موضوع: ریاضیات ـ راهنمای آموزشی (متوسطه)
موضوع: ریاضیات ـ آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
موضوع دانشگاه‌ها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمون‌ها
شناسه افزوده: موسوی، احسان، ۱۳۶۶ ـ
شناسه افزوده: صادقی، عطاءالله، ۱۳۵۴، ریاضیات گسسته و جبر و احتمال
شناسه افزوده: ابراهیمی، مهسا، ریاضیات گسسته و جبر و احتمال
شناسه افزوده: احمدی، آیلا، ریاضیات گسسته و جبر و احتمال
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۹ ۹۰۱۶ و ۱۴۷ ص / ۲۶/ ۳۰۶۰ LB
رده‌بندی دیویی: ۵۱۰/۷۶
شماره کتابشناسی ملی: ۲۰۰۴۰۵۲

نام کتاب: گسسته احتمال ـ مشت نمونه‌ی خروار
پدیدآورندگان: عطا صادقی، احسان موسوی
سرپرست گروه ویراستاری: محمدسجاد ثمودی
کاریکاتوریست و طراح جلد: امیرمحمد جوادی
ناشر: انتشارات علمی فار
مدیر مسئول: علی امین‌صادقیه
ناظر چاپ: بهنام صادقی‌فر
صفحه‌آرایی: مینا شریفی، مرضیه منصف
نوبت چاپ : اول (۱۳۸۹)
شمارگان: ۵۰۰۰ نسخه
بها: رایگان

به نام خدا

«مشت نمونه‌ی خروار ...»

این مکتوب فقط شامل فصل احتمال از کتاب آموزش «**گسسته و جبر و احتمال**» و همین فصل از کتاب آزمون «**گسسته و جبر و احتمال**» انتشارات علمی **فار** است که به عنوان نمونه تقدیم می‌شود. از شما دعوت می‌کنیم نمونه‌ی حاضر را بررسی کرده، عیار کار را بسنجید. ما منتظر پیشنهادات و انتقادات شماییم.

تلفن پاسخ‌گویی: ۶۶۹۲۶۰۶۱ ـ ۰۲۱

پست الکترونیک: phare.pub @ gmail.com

صندوق پستی: تهران ۷۹۷ ـ ۱۳۱۸۵ ـ انتشارات علمی فار

راه‌نمای کتاب آموزش «گسسته و جبر و احتمال» انتشارات علمی فار

شما در کتاب کامل «گسسته و جبر و احتمال انتشارات فار» با ۷ فصل روبه‌رو می‌شوید که همه‌ی مباحث ریاضیات گسسته، جبر و احتمال و فصل آنالیز ترکیبی ریاضی سال دوم را پوشش می‌دهد. هر فصل به بخش‌های کوچک‌تری تقسیم شده است که یادگیری‌تان را پله‌پله و ساده‌تر کند.

هر بخش با قسمت «در یک نگاه» شروع می‌شود. در چند خط به شما می‌گوییم که در این بخش چه خبر است و قرار است با چه چیزهایی دست و پنجه نرم کنید. پس از آن، یک خلاصه درس وجود دارد. این خلاصه درس قرار نیست به شما آموزش کامل بدهد. قرار است اگر قبلاً مطالب را سر کلاس درس یادگرفته‌اید یا از روی کتابی خوانده‌اید، یک جمع‌بندی در ذهن‌تان انجام شود. بعداز خلاصه‌ی درس، می‌رویم سراغ تست‌ها. تست‌های این کتاب چند ویژگی مهم دارد:

۱. شباهت با تست‌های کنکور دارند و سلیقه‌ای نیستند!

۲. ایده‌های تکراری در تست‌ها مطرح نشده است مگر این‌که برای درک یک مفهوم، تمرین‌کردن زیادتری لازم باشد.

۳. انواع ایده‌های به‌دردبخور را در تست‌ها می‌بینید و با خواندن این کتاب خیال‌تان راحت است که همه‌چیز را یادگرفته‌اید.

۴. تست‌ها ترتیب دارند و یک روند آموزشی منطقی را دنبال می‌کنند.

تست‌های این کتاب به ۲ دسته تقسیم‌بندی شده‌اند. یک سری تست‌هایی که شماره‌های آن‌ها به صورت معمولی نوشته شده است. برای مثال:

۲۸ ـ تعداد یال‌های یک گراف ...

یک سری تست‌هایی که شماره‌شان «توخالی» است. مانند:

۲۹ ـ **برای تبدیل یک گراف کامل مرتبه‌ی ...**

اگروقت کافی دارید، پیش‌نهاد می‌کنیم همه‌ی تست‌های کتاب را بزنید! ولی اگر نزدیک کنکور این کتاب را تهیه کردید و وقت‌تان تنگ بود، از روی تست‌های با شماره‌های «توخالی» بپرید. چون این تست‌ها شامل ایده‌های فرعی و کم‌اهمیت هستند. ولی تست‌های با شماره‌ی معمولی را حتماً بزنید.

ویژگی اصلی این کتاب، **پاسخ‌های تشریحی** آن است. بیش‌تر دانش‌آموزان از پاسخ‌های کتاب‌های موجود در بازار خیلی راضی نیستند. می‌گویند که پاسخ‌ها باید تشریحی باشد، نوع نوشتارش خشک نباشد و ... . پاسخ‌های کتاب ما خیلی خوب هستند! خیلی‌خیلی مفهومی و تشریحی هستند و اصولاً بعید است که شما پاسخی را بخوانید و نیاز به توضیح بیش‌تری داشته باشید.

این کتاب ۲ تا مؤلف دارد! بعضی از تست‌ها را یکی‌مان طرح کرده و دیگری جواب داده. بعضی از تست‌ها را هم همان طراحِ تست جواب داده. این را گفتیم که چه بگوییم؟ در پاسخ‌های این کتاب به سه شخصیت برمی‌خورید:

طراح: خُب طراح، طرح‌کننده‌ی تست است! بعضی موقع‌ها توضیح علمی و اثبات و از این‌جور چیزها می‌گوید.

پاسخ‌دهنده: آن آدمی که دارد تست را پاسخ می‌دهد!

سومی: این «سومی» یک شخصیت تقریباً دیوانه است! بعضی موقع‌ها توضیح‌های ساده و خودمانی می‌دهد، لوس‌بازی در می‌آورد، طراح و پاسخ‌دهنده را مسخره می‌کند و از این جور کارها. اصولاً «سومی» با همه دعوا دارد.

در پایان هر فصل، یک بخش به نام «تمرین‌های کلی» وجود دارد که تست‌هایی برای مرور کل فصل، از همه‌ی مباحث آن فصل، بدون ترتیب و به صورت «در هم» آورده شده که قرار است شما با زدن آن تست‌ها، مطمئن شوید که کل فصل را یاد گرفته‌اید.

این کتاب شامل تقریباً همه‌ی تست‌های کنکورهای ۱۰ سال گذشته است که شما تست‌های کنکور را ببینید و پی‌ببرید که چه‌قدر خوب گسسته را یاد گرفته‌اید و خوش‌حال شوید! طبیعتاً تست‌های سال ۸۸ هم در این کتاب وجود دارد و به قول آن ور آبی‌ها، این کتاب up-to-date است!

یک بخشی از این کتاب که ما خیلی دوستش داریم، یک سری کادرهای خاکستری هستند با عنوان «کتاب»، «فیلم»، «نمایش‌نامه»، «شعر»، «عکس» و ... هر جایی که پس از صفحه‌آرایی، جای خالی پیدا کردیم، از این چیزها برایتان گذاشته‌ایم. چون شما که اصولاً خیلی درس نمی‌خوانید! شاید این‌ها را بخوانید و روح‌تان تازه شود. شاید هم ترغیب شدید و بعد از کنکور رفتید چند تا کتاب غیردرسی خواندید و فیلم خوب دیدید و از زندگی‌تان لذت بردید. شاید هم که .... خلاصه که، ما خودمان این قسمت‌ها را خیلی دوست داریم!

این از این کتاب! ما یک **کتاب آزمون** هم داریم. اگر این کتاب را خواندید و حس کردید باز هم دوست دارید تست بزنید، می‌توانید کتاب آزمون‌مان را هم بخوانید. در کتاب آزمون، به‌ازای هر بخش از این کتاب، یک آزمون با پاسخ‌های تشریحی‌اش وجود دارد. در آخر هر فصل هم یک آزمون کلی دارد. در آخر کتاب آزمون هم ۶ تا **آزمون جامع** از کل مباحث گسسته وجود دارد که حکم جمع‌بندی را دارد. سه‌تا آزمون آخر کتاب آزمون، شامل همه‌ی تست‌های کنکورهای سراسری و آزاد **خارج از کشور** است. چون که خلاصه همه حس می‌کنند آن ور آب خبری هست، گفتیم شاید بد نباشد که تست‌های خارج از کشور را هم ببینید.

خُب شما که احتمالاً حس‌اش را ندارید برای‌مان نامه بنویسید! پس اگر در میان اینترنت‌گردی‌هایتان ۵ دقیقه وقت خالی پیدا کردید و خواستید چیزی درباره‌ی کتاب‌مان به ما بگویید، می‌توانید به phare.math @ gmail.com ای‌میل بزنید.

مهم‌ترین فصل این کتاب احتمال است! هم از لحاظ تعداد تست‌های کنکور هم از لحاظ این‌که درک انسان از احتمال، به زندگی‌اش معنا و مفهومی تازه می‌بخشد! شما لطف کنید و تست‌های این فصل را بزنید و در کنکور روسفیدمان کنید، درک تازه و این‌ها پیش‌کش! احتمال پیوسته که بخش ۳ از این فصل است، مربوط به کتاب جبر و احتمال است و خیلی هم مهم است. اگر فرصت کمی برای کنکور دارید، همین فصل احتمال را بخوانید برای کنکور!

	درصد میانگین تست‌های نظریه اعداد در کنکورهای ۵ سال گذشته
سراسری	۳۸٪
آزاد	۳۱٪

	تست‌های تألیفی	تست‌های کنکور	مجموع تست‌ها
تعداد	۲۱۳	۹۴	۳۰۷

بخش ۱
احتمال ساده و عملیات روی پیش‌آمدها

در یک نگاه

نخستین بخش احتمال را با تعریف‌های اولیه آغاز می‌کنیم: **پدیده‌ی تصادفی، فضای نمونه‌ای، پیش‌آمد** و ... . فضای نمونه‌ای **گسسته** و **پیوسته** را می‌شناسیم. سپس تعریف احتمال را یاد می‌گیریم. در آخر هم کار خود را با **عملیات روی پیش‌آمدها** به پایان می‌بریم.

یک سکه را که پرتاب کنیم، یا «رو» می‌آید یا «پشت». ولی قبل از پرتاب سکه، به‌طور قطعی نمی‌دانیم که حاصل آزمایش‌مان چه خواهد بود. یک تاس هم همین‌طور است. به‌طور قطعی نمی‌توانیم بگوییم که «تاس حتماً ۳ می‌آید» یا ...

به این پدیده‌ها، پدیده‌های تصادفی گفته می‌شود. **در پدیده‌های تصادفی نتیجه‌ی آزمایش یا مشاهده را قبل از وقوع آن نمی‌توان مشخص کرد.**

برای مثال نتیجه‌ی پرتاب یک تاس را با **آزمایش** در می‌یابیم. ولی نتیجه‌ی تعداد تماشاگران یک بازی فوتبال با **مشاهده** به دست می‌آید.

به مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک پدیده‌ی تصادفی، فضای نمونه‌ای می‌گوییم و آن را با S نمایش می‌دهیم. برای مثال همه‌ی نتایج ممکن در پرتاب یک تاس، عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ اهستند. پس فضای نمونه‌ای آن به این صورت می‌شود: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

به هر عضو از فضای نمونه‌ای، یک **برآمد** یا **حالت** می‌گوییم. مثلاً در پرتاب یک تاس، ۳ یک برآمد است.

دو نوع فضای نمونه‌ای داریم: **گسسته** و **پیوسته**

فضای نمونه‌ای گسسته: فضای نمونه‌ای‌های زیر را در نظر بگیرید:

① پرتاب یک تاس
② پرتاب هم‌زمان ۲ سکه
③ درآوردن ۲ توپ از کیسه‌ای شامل ۸ توپ
⋮

تعداد عضوهای همه‌ی این فضای نمونه‌ای‌ها، قابل شمارش است و یک عدد حسابی است! یعنی ۰، ۱، ۲، ۳ و ...

فضای نمونه‌ای گسسته یک مجموعه‌ی **متناهی** یا **نامتناهی شمارا** است.

فضای نمونه‌ای پیوسته: وقتی فضای نمونه‌ای دارای **بی‌شمار عضو** است با یک فضای نمونه‌ای پیوسته روبه‌رو هستیم. برای مثال انتخاب کردن یک نقطه روی یک تکه چوب، انتخاب کردن یک لحظه از عمر یک انسان، انتخاب کردن نقطه‌ای از مساحت یک مربع، حجم یک هرم و ... همه‌ی این‌ها دارای بی‌شمار عضو هستند. کتاب جبر و احتمال می‌گوید «فضای نمونه‌ای پیوسته یک مجموعه‌ی نامتناهی به صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی و یا شکل‌ها و حجم‌های هندسی است.»

به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، یک پیش‌آمد می‌گوییم. برای مثال در پرتاب یک تاس $\{2,4,6\}$ پیش‌آمد «زوج آمدن» و $\{2,3,5\}$ پیش‌آمد «عدد اول آمدن» و $\{3\}$ پیش‌آمد «رو شدن عدد ۳» است.

۱ تعداد پیش‌آمدهای پرتاب یک تاس چند است؟

گفتیم که فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به این صورت است: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$
پس فضای نمونه‌ای‌مان یک مجموعه‌ی ۶ عضوی است. طبق تعریف پیش‌آمد، به تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، پیش‌آمد مختلف داریم. در این‌جا $n(S)=۶$ است. پس $۲^۶=۶۴$ پیش‌آمد مختلف داریم.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر ۲^n است.

چه وقتی می‌گوییم «یک پیش‌آمد رخ داده است؟» برای مثال در پرتاب یک تاس، چه موقعی می‌گوییم پیش‌آمدن «زوج آمدن» رخ داده است؟ واضح است که اگر تاس ۲ ، ۴ یا ۶ بیاید، می‌گوییم «زوج آمده است» و پیش‌آمد «زوج آمدن» رخ داده است. پس:

مثلاً در پرتاب یک تاس، اگر عدد رو شده ۳ باشد، پیش‌آمد «زوج آمدن» **رخ نداده** است.

هرگاه حاصل آزمایش یکی از اعضای پیش‌آمد باشد، می‌گوییم آن پیش‌آمد رخ داده است.

با ۲ اصطلاح باید آشنا باشید:

پیش‌آمد نشدنی (ناممکن): در هر آزمایش، **به مجموعه‌ی ∅ (تهی) پیش‌آمد نشدنی می‌گوییم.** چرا؟ چون احتمال رخ دادن ∅ برابر صفر است. این را چند لحظه‌ی بعد خواهید فهمید! دقت کنید که پیش‌آمدهایی که فقط عضوهای **خارج از فضای نمونه‌ای** یک آزمایش داشته باشند برای **آن آزمایش**، پیش‌آمد تهی به حساب می‌آیند. برای مثال در پرتاب یک تاس «آمدن عدد ۱۳» برابر ∅ به حساب می‌آید، چون خارج از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

در مسئله‌های احتمال، **پیش‌آمدهای قطعی و نشدنی، تنها از روی فضای نمونه‌ای مشخص می‌شوند** و ربطی به این‌که حاصل هر بار آزمایش چه باشد، ندارند!

پیش‌آمد قطعی (حتمی): در هر آزمایش، **به فضای نمونه‌ای پیش‌آمد قطعی می‌گوییم**. چون احتمال رخ‌دادن فضای نمونه‌ای ٪۱۰۰ یا برابر ۱ است.

در یک فضای نمونه‌ای گسسته با تعداد عضوهای متناهی، که شانس رخ‌دادن همه‌ی اعضای فضای نمونه‌ای برابر هم باشد، با طی کردن ۳ مرحله احتمال وقوع یک پیش‌آمد را به‌دست می‌آوریم:

① تشخیص آزمایش یا مشاهده و به‌دست‌آوردن فضای نمونه‌ای و تعداد عضوهای آن؛ یعنی $n(S)$.

② تشخیص پیش‌آمد یا در واقع همان پدیده‌ای که می‌خواهیم احتمال آن را پیدا کنیم و به‌دست‌آوردن تعداد عضوهای پیش‌آمد؛ یعنی $n(A)$.

③ چون شانس رخ‌دادن هریک از عضوها برابر است، با تقسیم کردن $n(A)$ بر $n(S)$ می‌توانیم احتمال پیش‌آمد A را پیدا کنیم. پس:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{احتمال رخ‌دادن پیش‌آمد A}}=\frac{\overbrace{n(A)}^{\text{تعداد عضوهای پیش‌آمد مطلوب}}}{\underbrace{n(S)}_{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای}}}$$

۲ احتمال این‌که در پرتاب یک تاس، عدد رو شده، یک عدد اول باشد چه‌قدر است؟

فضای نمونه‌ای ما پرتاب یک تاس است. پس: $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\Rightarrow n(S)=۶$

پیش‌آمد مطلوب ما این است که عدد رو شده عدد اول باشد. یعنی: $A=\{۲,۳,۵\}\Rightarrow n(A)=۳$

در مرحله‌ی آخر یک تقسیم ساده داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

بعضی از تست‌ها هستند که بحث فقط سر یک پیش‌آمد نیست. برای مثال شما با دو پیش‌آمد روبه‌رو هستید و باید یک سری عملیات روی آن‌ها انجام بدهید! به این قسمت می‌گویند **عملیات روی پیش‌آمدها** و قوانین احتمال!

متمم: اگر A پیش‌آمدی از فضای نمونه‌ای S باشد، متمم پیش‌آمد A را با A' نمایش می‌دهیم. **A' وقتی رخ می‌دهد که A رخ ندهد!** برای مثال اگر در پرتاب یک تاس پیش‌آمد A این باشد که «عدد رو شده فرد باشد»، پیش‌آمد A' به این صورت می‌شود: «عدد رو شده زوج باشد»

اشتراک: اگر A و B دو پیش‌آمد از فضای نمونه‌ای S باشند، پیش‌آمد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که **هر دو پیش‌آمد A و B رخ بدهند**. برای مثال اگر در پرتاب یک تاس، A پیش‌آمد «رخ دادن عدد اول» و B پیش‌آمد «رخ دادن عدد فرد» باشد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{۲,۳,۵\} \\ B=\{۱,۳,۵\} \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} A\cap B=\{۳,۵\}$$

$A \cap B$ پیش‌آمد این است که «عدد رو شده هم اول باشد و هم فرد»

اجتماع: اگر A و B دو پیش‌آمد از فضای نمونه‌ای S باشند، $A \cup B$ زمانی اتفاق می‌افتد که یکی از پیش‌آمدهای A یا B یا هر دوی آن‌ها رخ بدهند.

تفاضل: پیش‌آمد $A-B$ زمانی رخ می‌دهد که پیش‌آمد A اتفاق بیافتد ولی پیش‌آمد B اتفاق **نیافتد**. برای مثال وقتی می‌خواهید احتمال آن را پیدا کنید که در پرتاب یک تاس، عدد رو شده اول باشد ولی فرد نباشد، می‌توانید این کار را بکنید:

$$\left.\begin{array}{l} A=\{۲,۳,۵\} \\ B=\{۱,۳,۵\} \end{array}\right\} \xrightarrow{-} A-B=\{۲\} \Rightarrow P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۱}{۶}$$

اگر تست بگوید که «احتمال آن‌که A رخ ندهد چه‌قدر است؟» باید $P(A')$ را حساب کنید.

اگر از شما بپرسند «احتمال آن‌که A و B هر دو رخ بدهند چه‌قدر است؟» باید $P(A\cap B)$ را پیدا کنید. لفظ «**و**» باید شما را یاد $\cap$ بیاندازد!

وقتی سؤال به شما می‌گوید که «احتمال آن‌که A یا B رخ بدهد را به‌دست آورید.» منظورش این است که $P(A\cup B)$ را پیدا کنید. همیشه «**یا**» باید شما را یاد $\cup$ بیاندازد.

هنگامی که به شما می‌گویند «احتمال آن‌که A رخ بدهد ولی B رخ **ندهد** چه‌قدر است؟» باید $P(A-B)$ را محاسبه کنید.

برای انجام عملیات روی پیش‌آمدها، باید چند تا رابطه را بدانید. شبیه این رابطه‌ها را در فصل «مجموعه‌ها» دیده‌اید. آن‌جا مثلاً دیده‌ایم که: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

هرچه در فصل «مجموعه‌ها» خواندید همان‌ها هم در فصل «احتمال» صدق می‌کند. با این تفاوت که هرجا n دیدید، به‌جای آن P قرار می‌دهید! پس رابطه‌ی بالا این‌طوری می‌شود:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \xrightarrow{\div n(S)} \frac{n(A\cup B)}{n(S)}=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)} \Rightarrow$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

این چند تا رابطه را باید در خاطر داشته باشید:

۱) $P(A')=۱-P(A)$

۲) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

۳) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ـ کدام‌یک از متغیرهای تصادفی زیر گسسته نیست؟

۱) تعداد روزهای بارانی فصل پاییز
۲) مجموع اعداد رو شده در پرتاب دو تاس
۳) تعداد پاس‌های سالم یک بازی‌کُن در یک بازی فوتبال
۴) طول قد یک زرافه در کشور تانزانیا

۲ ـ فضای نمونه‌ای در آزمایش پرتاب هم‌زمان یک تاس و سه سکه دارای چند عضو است؟

۱) ۱۲ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۴۸

۳ ـ فضای نمونه‌ای در آزمایش «انتخاب ۲ توپ از میان ۳ توپ سفید متمایز و ۶ توپ قرمز متمایز» چند عضو دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۶ ۳) ۴۸ ۴) ۶۰

۴ ـ خانواده‌ای دارای سه فرزند است، به‌طوری‌که می‌دانیم دست‌کم یکی از آن‌ها دختر است. فضای نمونه‌ای جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۷ ۴) ۸

۵ ـ یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر فرد بیاید یک سکه و اگر زوج بیاید دو سکه پرتاب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در این آزمایش چند تا است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۶ ـ در یک آزمایش، فضای نمونه‌ای به صورت {عالی، خوب، متوسط، بد، خیلی بد}=S است. تعداد کل پیش‌آمدها در این آزمایش چند است؟

۱) ۵ ۲) ۱ ۳) ۲۵ ۴) ۳۲

۷ ـ در کیسه‌ای ۴ توپ زرد متمایز و ۴ توپ نارنجی متمایز وجود دارد. ابتدا یک توپ را انتخاب کرده و پس از مشاهده، آن را کنار گذاشته و توپ دیگری انتخاب می‌کنیم. در انتخاب این دو توپ، فضای نمونه‌ای چند عضوی خواهد بود؟

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۶ ۴) ۶۴

۸ ـ فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس به شرط آن‌که جمع اعداد رو شده برابر ۸ شود، چند عضو دارد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۹ ـ یک تاس را پرتاب می‌کنیم و سپس به تعداد عدد رو شده، سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضوی است؟

۱) ۲۱ ۲) ۴۲ ۳) ۱۲۶ ۴) ۱۲۸

۱۰ ـ فضای نمونه‌ای آزمایش «انتخاب ۲ سؤال گراف و ۳ سؤال نظریه‌ی اعداد از آزمونی شامل ۱۰ سؤال گراف و ۱۰ سؤال نظریه‌ی اعداد» دارای چند عضو است؟

۱) $\binom{10}{2}+\binom{10}{3}$ ۲) $\binom{10}{2}\times\binom{10}{3}$ ۳) $\binom{20}{5}$ ۴) $\frac{20!}{5!}$

۱۱ ـ فضای نمونه‌ای انتخاب ۲ عدد از میان اعداد {۱,۲,۳,...,۷} چند عضو دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۴۲

۱۲ ـ در پرتاب دو سکه چند پیش‌آمد متمایز داریم؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۱۳ ـ در پرتاب هم‌زمان یک تاس و یک سکه، چند برآمد وجود دارد که شامل یک عدد زوج و رو آمدن سکه باشد؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۴ ـ اگر $S=\{a,b,c,d\}$ و $A=\{a,c\}$ باشد، پیش‌آمد A زمانی رخ می‌دهد که کدام‌یک از پیش‌آمدهای زیر رخ دهد؟

۱) $\{a\}$ ۲) $\{c\}$ ۳) $\{a\}$ یا $\{c\}$ ۴) $\{b\}$ یا $\{d\}$

۱۵ ـ اگر فضای نمونه‌ای $S=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ باشد و پیش‌آمد A به صورت $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ تعریف شده باشد و حاصل آزمایش a_3 باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) A رخ داده است. ۲) $\{a_3\}$ پیش‌آمد قطعی است.

۳) $\{a_1,a_2,a_3\}$ پیش‌آمد قطعی است. ۴) A' پیش‌آمد نشدنی است.

۱۶ ـ در یک‌بار آزمایش پرتاب دو سکه، هر دو سکه پشت می‌آیند. در این صورت:

۱) پیش‌آمد {(پشت، رو)} رخ داده است. ۲) پیش‌آمد {(پشت، پشت)، (رو، رو)} رخ داده است.

۳) پیش‌آمد {(پشت، پشت)} یک پیش‌آمد قطعی است. ۴) پیش‌آمد {(پشت، رو)} یک پیش‌آمد نشدنی است.

۱۷ ـ در پرتاب دو تاس، A پیش‌آمد «رخ دادن عدد اول در دست‌کم یکی از تاس‌ها» است. حاصل آزمایش کدام‌یک از گزینه‌های زیر باشد، تا بگوییم A رخ نداده است؟

۱) (۲,۳) ۲) (۱,۶) ۳) (۳,۴) ۴) (۲,۶)

۱۸ ـ تعداد کل پیش‌آمدها در پرتاب یک تاس، اگر بدانیم که در پرتاب تاس فقط عدد اول ظاهر شده است، چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۶۴

۱۹ ـ در انتخاب دو عدد از میان عددهای بازه‌ی [۲,۸]، فضای نمونه‌ای چند عضو دارد؟

۱) ۷ ۲) ۲۱ ۳) ۴۲ ۴) بی‌شمار

۲۰ ـ اگر $S=\{1,\Delta,a,\bigcirc\}$ فضای نمونه‌ای باشد، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، یک پیش‌آمد از S نیست؟

۱) $\varnothing$ ۲) $\{a,\Delta\}$ ۳) $\{-1,\bigcirc\}$ ۴) $\{a,1,\Delta\}$

۲۱ ـ یک سکه را ۶ بار پرتاب می‌کنیم. پیش‌آمد این‌که «دقیقاً سه بار پشت بیاید» چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۱۸ ۳) ۲۰ ۴) ۳۶

۲۲ ـ ۱۱ سیب در یک سبد وجود دارد که ۵ تای آن‌ها «کال» هستند. اگر ۳ تا سیب به‌طور تصادفی از سبد برداریم، احتمال آن‌که هر ۳ سیب «رسیده» باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{2}{33}$ ۲) $\frac{4}{33}$ ۳) $\frac{6}{33}$ ۴) $\frac{8}{33}$

۲۳ ـ از میان ۱۰ جهانگرد، ۳ نفر اروپایی و ۷ نفر آمریکایی هستند. اگر از بین این افراد، ۵ نفر را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال آن‌که ۳ نفرشان آمریکایی باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{5}{12}$ ۲) $\frac{6}{12}$ ۳) $\frac{7}{12}$ ۴) $\frac{8}{12}$

۲۴ ـ دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۷ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{18}$

۲۵ ـ درون بسته‌ای، ۸ کارت که روی آن‌ها شماره‌های ۱ تا ۸ نوشته شده است وجود دارد. به‌طور تصادفی ۲ کارت را از بسته خارج می‌کنیم. به کدام احتمال، شماره‌های هر دو کارت عددی فرد است؟

۱) $\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{3}{14}$ ۳) $\frac{3}{7}$ ۴) $\frac{5}{14}$

۲۶ ـ از بین ۷ دانش‌جوی رشته‌ی مکانیک و ۵ دانش‌جوی رشته‌ی الکترونیک، ۶ نفر به‌تصادف انتخاب می‌شوند. احتمال آن‌که فقط یک نفر از این ۶ نفر دانش‌جوی مکانیک باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{121}$ ۲) $\frac{7}{121}$ ۳) $\frac{1}{132}$ ۴) $\frac{7}{132}$

۲۷ ـ احتمال آن‌که مجموع ارقام یک عدد دو رقمی برابر ۹ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{9}{90}$ ۲) $\frac{10}{90}$ ۳) $\frac{9}{100}$ ۴) $\frac{1}{100}$

۲۸ ـ احتمال آن‌که در پرتاب دو تاس، فقط یکی از تاس‌ها ۳ بیاید، کدام است؟

۱) $\frac{5}{36}$ ۲) $\frac{11}{36}$ ۳) $\frac{5}{18}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۲۹ ـ در پرتاب ۲ تاس، جفتِ تاس‌ها بزرگ‌تر از ۳ ظاهر شده‌اند. احتمال آن‌که عدد دو تاس برابر باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{3}$

۳۰ ـ از میان ۴ کتاب ریاضی، ۲ کتاب فیزیک و ۵ کتاب زیست‌شناسی، دو کتاب به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که موضوع دو کتاب یکسان باشد، کدام است؟

۱) $\frac{14}{55}$ ۲) $\frac{15}{55}$ ۳) $\frac{16}{55}$ ۴) $\frac{17}{55}$

۳۱ ـ سه تاس سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که هیچ‌کدام از تاس‌ها زوج نیایند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{8}$ ۲) $\frac{8}{27}$ ۳) $\frac{1}{27}$ ۴) $\frac{1}{64}$

۳۲ ـ از میان اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ دو عدد متمایز به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع این دو عدد فرد شود، کدام است؟

۱) $\frac{3}{7}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) $\frac{6}{7}$

۳۳ ــ در کیسه‌ای ۱۰ کارت به شماره‌های ۱ تا ۱۰ وجود دارد. یک کارت از کیسه به‌تصادف خارج می‌کنیم و کنار می‌گذاریم. سپس یک کارت دیگر خارج می‌کنیم. با کدام احتمال شماره‌ی این کارت ۷ است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۰}$

۳۴ ــ از میان همه‌ی اعداد زوج سه‌رقمی که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ می‌توان نوشت (تکرار ارقام مجاز نیست) یک عدد به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال رقم دهگان این عدد ۵ است؟

۱) $\frac{۵}{۲۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۳}$ ۳) $\frac{۱}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱}{۳۰}$

۳۵ ــ مربی یک تیم فوتبال و ۱۱ بازی‌کُن اصلی تیم دور یک میز گرد می‌نشینند. احتمال این‌که بازی‌کن شماره ۱۰ روبه‌روی مربی بنشیند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۱۰}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۳۶ ــ از کیسه‌ای که شامل ۶ توپ نارنجی، ۴ توپ قرمز و ۲ توپ زرد متمایز است، ۲ توپ به‌تصادف بیرون می‌کشیم. احتمال آن‌که توپ‌ها ناهم‌رنگ باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۳۷ ــ از میان ۳ آلمانی، ۳ هلندی و ۳ فرانسوی می‌خواهیم ۳ نفر را به‌تصادف انتخاب کنیم. به کدام احتمال هر سه‌تای آن‌ها اهل یک کشور هستند؟

۱) $\frac{۱}{۲۸}$ ۲) $\frac{۳}{۲۸}$ ۳) $\frac{۱}{۸۴}$ ۴) $\frac{۴}{۸۴}$

۳۸ ــ در پرتاب ۳ تاس، احتمال آن‌که حداقل یک بار ۳ ظاهر شود، کدام است؟

۱) $\frac{۹۰}{۲۱۶}$ ۲) $\frac{۹۱}{۲۱۶}$ ۳) $\frac{۱۰۱}{۲۱۶}$ ۴) $\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$

۳۹ ــ در پرتاب هم‌زمان ۵ سکه احتمال این‌که فقط ۴ سکه رو یا فقط ۴ سکه پشت بیاید، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۳۲}$ ۲) $\frac{۹}{۳۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۶}$

۴۰ ــ احتمال این‌که سهند دانشگاه قبول شود ۰/۷ و احتمال این‌که او در مسابقات شنا نیز نفر اول شود ۰/۴۵ است. اگر با احتمال ۰/۸ دست‌کم در یکی از این مراحل موفق شود، احتمال آن‌که هم در دانشگاه قبول شود و هم نفر اول مسابقات شنا شود، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۳۵ ۳) ۰/۴ ۴) ۰/۴۵

۴۱ ــ از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۳۰۰\}$ عددی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد مضرب ۳ یا ۵ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۶}{۱۵}$ ۲) $\frac{۷}{۱۵}$ ۳) $\frac{۸}{۱۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۵}$

۴۲ ــ در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که دو تاس متوالی بیایند یا یکی از آن‌ها برابر ۴ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۴۳ ــ اگر $P(A-B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(A')=\frac{۱}{۴}$ باشد، حاصل $P(B-A')$ برابر چند است؟

۱) $\frac{۱}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۴۴ ــ در پرتاب دو تاس همگن، احتمال آن‌که مجموع دو تاس بیش‌تر از ۸ شود را $P(A)$ و احتمال آن‌که هر دو تاس فرد ظاهر شوند را $P(B)$ در نظر می‌گیریم. حاصل $P(A-B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

۴۵ ــ در پرتاب دو تاس، احتمال آن‌که مجموع برابر ۹ شود ولی دو تاس متوالی نیامده باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱}{۱۸}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۴۶ ــ در پرتاب یک تاس، چند پیش‌آمد متمایز با احتمال وقوع $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۱ ۴) ۲۸

۴۷ ـ دو عدد متمایز به‌تصادف از میان اعداد ۱ تا ۹ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو عدد انتخاب‌شده فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۴۸ ـ احتمال آن‌که در پرتاب یک تاس یک عدد فرد یا اول ظاهر شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۴۹ ـ احتمال آن‌که در پرتاب دو تاس هر دو عدد فرد باشند یا هر دو عدد مضرب ۳ باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳۶}$ ۲) $\frac{۱۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۱۲}{۳۶}$ ۴) $\frac{۱۳}{۳۶}$

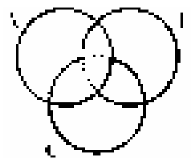
۵۰ ـ احتمال آن‌که در پرتاب ۲ تاس، هر دو عدد ظاهر شده زوج باشند ولی مضرب ۳ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۹}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۹}$

۵۱ ـ اگر $P(B)=\frac{۲}{۳}$ و $P(A'\cup B')=\frac{۶}{۷}$ باشد، احتمال آن‌که پیشامد B رخ دهد ولی پیش‌آمد A رخ ندهد، کدام است؟

۱) $\frac{۹}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۱}$

۵۲ ـ در نمودار وِنِ روبه‌رو، قسمت هاشورخورده نشان‌دهنده‌ی کدام پیش‌آمد است؟



۱) A یا C رخ داده است.
۲) A و C رخ داده و B رخ نداده است.
۳) C رخ داده یا فقط A رخ داده است.
۴) A یا C رخ داده و B رخ نداده است.

۵۳ ـ یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس دارای ۶ عضو است. چند پیش‌آمد با احتمال وقوع بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۳}$ وجود دارد؟

۱) ۲۲ ۲) ۴۲ ۳) ۵۷ ۴) ۶۴

۵۴ ـ چهار میله به طول‌های ۲، ۵، ۶ و ۹ متر داریم. اگر سه تا از این میله‌ها را انتخاب کنیم، با کدام احتمال می‌توانیم با آن‌ها یک مثلث بسازیم؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵۵ ـ در یک دبیرستان، معدل کل دانش‌آموزان سه پایه‌ی اول، دوم و سوم در جدول زیر آمده است. اگر یک دانش‌آموز سال دوم به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال این‌که معدل او زیر ۱۴ نباشد، چه‌قدر است؟

پایه / معدل	اول	دوم	سوم
۱۷ به بالا	۶۸	۵۷	۴۵
۱۴ تا ۱۷	۲۳	۳۰	۳۹
زیر ۱۴	۹	۱۳	۱۶

۱) $\frac{۴۳}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۸۷}{۱۰۰}$ ۳) $\frac{۷۲}{۱۰۰}$ ۴) $\frac{۲۶۲}{۳۰۰}$

۵۶ ـ در کیف پول یک مهندس، ۵ اسکناس ۱۰۰۰ تومانی و ۲ اسکناس ۵۰۰ تومانی وجود دارد. اگر این شخص ۲ اسکناس از کیف پولش بیرون بیاورد، با کدام احتمال ۱۵۰۰ تومان پول در دست دارد؟

۱) $\frac{۱۰}{۲۱}$ ۲) $\frac{۱۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱۲}{۲۱}$ ۴) $\frac{۱۳}{۲۱}$

۵۷ ـ در یک قفسه ۱۰ کتاب وجود دارد که چند تای آن‌ها کتاب ریاضی و بقیه کتاب فیزیک هستند. ۲ کتاب به‌طور تصادفی از بین آن‌ها انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که هر دوی این کتاب‌ها، کتاب ریاضی باشند $\frac{۷}{۱۵}$ است. در این قفسه چند کتاب فیزیک داریم؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

۵۸ ـ ۵ کارت که شماره‌های ۱ تا ۵ روی آن‌ها نوشته شده است درون جعبه‌ای قرار دارد. ۲ کارت را به‌طور هم‌زمان و به‌تصادف از این جعبه خارج می‌کنیم. احتمال این‌که اختلاف شماره‌های کارت‌ها برابر ۲ شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۴}{۱۰}$ ۴) $\frac{۵}{۱۰}$

۵۹ ــ ۷ مهره با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۷ در کیسه‌ای وجود دارند. اگر سه مهره را با هم به‌تصادف از کیسه خارج کنیم، با کدام احتمال مجموع اعداد نوشته‌شده روی این مهره‌ها عددی زوج است؟

۱) $\frac{۱۶}{۳۵}$　۲) $\frac{۱۷}{۳۵}$　۳) $\frac{۱۸}{۳۵}$　۴) $\frac{۱۹}{۳۵}$

۶۰ ــ در یک کلاس ۵ پسر و ۳ دختر حضور دارند. دو نفر به‌تصادف از این کلاس انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی دختر باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۲۸}$　۲) $\frac{۱۵}{۲۸}$　۳) $\frac{۳}{۵۶}$　۴) $\frac{۱۵}{۵۶}$

۶۱ ــ از میان ۳ بازی‌کُن استقلال و ۷ بازی‌کُن پرسپولیس، ۳ بازی‌کُن را انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که حداکثر ۲ بازی‌کُن پرسپولیس در میان این افراد باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$　۲) $\frac{۱۰}{۲۴}$　۳) $\frac{۱۴}{۲۴}$　۴) $\frac{۱۷}{۲۴}$

۶۲ ــ سه عدد متمایز از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که حاصل‌ضرب این ۳ عدد برابر ۱۲ شود، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۸۴}$　۲) $\frac{۲}{۵۰۴}$　۳) $\frac{۱}{۸۴}$　۴) $\frac{۱}{۵۰۴}$

۶۳ ــ سه عدد (متمایز یا یکسان) از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۹\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع این اعداد برابر ۷ باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۴}{۱۶۵}$　۲) $\frac{۱۵}{۱۶۵}$　۳) $\frac{۴}{۸۴}$　۴) $\frac{۱۵}{۸۴}$

۶۴ ــ احتمال آن‌که مجموع ارقام یک عدد سه‌رقمی برابر ۱۰ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵۳}{۹۰۰}$　۲) $\frac{۵۴}{۹۰۰}$　۳) $\frac{۵۵}{۹۰۰}$　۴) $\frac{۵۶}{۹۰۰}$

۶۵ ــ ۱۰ توپ مشابه را داخل ۳ جعبه قرار می‌دهیم. به کدام احتمال در جعبه‌ی اول دست‌کم ۳ توپ قرار دارد؟

۱) $\frac{۶}{۱۱}$　۲) $\frac{۷}{۱۱}$　۳) $\frac{۸}{۱۱}$　۴) $\frac{۹}{۱۱}$

۶۶ ــ ۱۰ توپ متمایز را داخل ۳ جعبه‌ی متمایز قرار می‌دهیم. به کدام احتمال در جعبه‌ی اول دست‌کم یک توپ قرار می‌گیرد؟

۱) $۱-\frac{۱}{۳^{۱۰}}$　۲) $\frac{۲^{۱۰}}{۳^{۱۰}}$　۳) $\frac{۱}{۳^{۱۰}}$　۴) $۱-(\frac{۲}{۳})^{۱۰}$

۶۷ ــ شش نفر را به‌تصادف در سه اتاق یک هتل جا می‌دهیم. احتمال آن‌که در اتاق اول یک نفر، در اتاق دوم دو نفر و در اتاق سوم سه نفر قرار گرفته باشند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱۵}{۶^۳}$　۲) $\frac{۶۰}{۶^۳}$　۳) $\frac{۱۵}{۳^۶}$　۴) $\frac{۶۰}{۳^۶}$

۶۸ ــ A ، B و C در یک برج هفت طبقه ساکن‌اند. احتمال آن‌که خانه‌ی A بالاتر از B و خانه‌ی B بالاتر از C باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۵}$　۲) $\frac{۱}{۶}$　۳) $\frac{۱}{۳}$　۴) $\frac{۶}{۳۵}$

ترزا گفته بود: «اگه تو رو ندیده بودم، مسلماً عاشق اون می‌شدم».
همان وقت هم این گفته، توما را در حزنی عمیق فرو برده بود. ناگهان پی برد که ترزا کاملاً تصادفی عاشق او شده و می‌توانسته جای او مجذوب دوستش شود. خارج از عشق تحقق‌یافته‌ی او نسبت به توما ــ در قلمرو احتمالات ــ به تعداد بی‌شمار هم عشق‌های محتمل به مردهای دیگر نیز وجود داشت.
برای همه‌ی ما تصور ناپذیر است که یگانه عشق‌مان چیزی سبک و سست باشد، چیزی فاقد وزن باشد، می‌پنداریم عشق ما آن چیزی است که ناگریز باید باشد، که بدون آن زندگی ما از دست رفته است. توما نظر ترزا را درباره‌ی دوستش (ز) به یاد می‌آورد و می‌دید که «ضروری است» مایه‌ی اصلی حدیث یگانه‌ی عشق او نبوده، بلکه «می‌توانست کاملاً طور دیگری اتفاق افتد» مایه‌ی اصلی آن بوده است.
ماجراهای عشق‌شان را مرور کرد:
هفت سال پیش «اتفاقاً» یک مورد سخت تورم نخاع در بیمارستان شهری که ترزا در آن کار می‌کرد، پیش آمد. رئیس بخش بیمارستان به فوریت برای مشاوره به آن‌جا خوانده شد. اما رئیس بخش «اتفاقاً» از بیماری سیاتیک رنج می‌برد و چون قادر به حرکت نبود، توما را به جای خود به بیمارستان شهرستان فرستاد. از پنج مهمان خانه‌ی شهر، او «اتفاقاً» به هتلی رفت که ترزا در آن کار می‌کرد. قبل از حرکت «اتفاقاً» چند دقیقه برای نوشیدن آبجو فرصت داشت. ترزا «اتفاقاً» وقت کارش بود و «اتفاقاً» مسئول میز او بود. بنابراین یک رشته «اتفاق» شش‌گانه لازم بود که او را به سوی ترزا بکشاند، گویی اگر به حال خود گذاشته شده بود، به هیچ نمی‌رفت.
سبکی تحمل‌ناپذیر هستی / میلان کوندرا

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ــ گزینه‌ی ۴ متغیر تصادفی گسسته متغیری است که مقدارش می‌تواند یک عدد صحیح نامنفی باشد. حالا گزینه‌ها را نگاه می‌کنیم:

۱ «تعداد روزهای بارانی فصل پاییز» یک عدد صحیح نامنفی است. مثلاً صفر، ۱۲، ۱۹ یا ...

۲ «مجموع اعداد روشده در پرتاب دو تاس» یک عدد طبیعی بین ۲ تا ۱۲ است. مثلاً ۳، ۸ یا ۱۱.

۳ «تعداد پاس‌های سالم یک بازی‌کُن در یک بازی فوتبال» هم یک عدد صحیح نامنفی است. مثلاً صفر، ۹، ۲۸، ۱۹۰ یا ...

ولی «**طول قد یک زرافه در کشور تانزانیا**» یک متغیر تصادفی پیوسته است؛ یعنی عددهایی که می‌تواند به خود بگیرد لزوماً نباید عدد طبیعی باشد. مثلاً قد این زرافه می‌تواند یک عدد حقیقی مثل ۳/۸۷۹۱۳ متر باشد!

۲ ــ گزینه‌ی ۴ هر سکه‌ای را که پرتاب کنیم یا پشت می‌آید یا رو. پس در پرتاب سکه با ۲ حالت روبه‌رو هستیم. وقتی هم یک تاس را پرتاب می‌کنیم، یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ یا ۶ ظاهر می‌شود. پس در پرتاب یک تاس با ۶ حالت روبه‌رو هستیم. **می‌دانیم که به مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن، فضای نمونه‌ای می‌گویند.**

در این‌جا طبق «اصل ضرب»، تعداد اعضای فضای نمونه‌ای یا همان حالت‌های ممکن برابر می‌شود با این چیزی که می‌بینید:

سکه‌ی ۱ سکه‌ی ۲ سکه‌ی ۳ تاس

$\mathbf{48} = 6\times2\times2\times2 = (2)\ (2)\ (2)\ (6)$

پشت یا رو ۶ حالت

۳ ــ گزینه‌ی ۲ از فصل آنالیز ترکیبی به یاد دارید که (*سومی: اگر هم به یاد ندارید، اصلاً به روی خودتان نیاورید! در این جور مواقع پاسخ‌دهنده در ادامه‌ی پاسخ، آن‌چه را که باید به یاد داشته باشید، خودش می‌گوید. گرفتید ترفند رو؟!*) تعداد روش‌های انتخاب r شیء از میان n شیء برابر است با: $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

در این‌جا هم می‌خواهیم ۲ توپ را از میان ۹ = ۶ + ۳ توپ متمایز انتخاب کنیم. تعداد حالت‌های این کار برابر است با: $\binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \mathbf{36}$

۴ ــ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای برای جنسیت فرزندان یک خانواده‌ی سه فرزندی، به صورت روبه‌رو است. زمانی که هیچ شرطی در صورت سؤال نباشد، فضای نمونه‌ای ۸ عضو دارد. حالا می‌خواهیم که خانواده‌ی موردنظر ما دست‌کم یک دختر داشته باشد. پس حالت (پ،پ،پ) دیگر نمی‌تواند عضو فضای نمونه‌ای ما باشد. (*سومی: زیرا در این حالت هیچ فرزندی دفتر نیست دیگه! دست‌کم یک دفتر، یعنی یک دفتر یا بیش‌تر تا دفترا!*) پس **۷ تا** عضو باقی‌مانده، عضو فضای نمونه‌ای‌مان هستند فقط!

فرزند سوم	فرزند دوم	فرزند اول
پ	پ	پ
د	پ	پ
پ	د	پ
د	د	پ
د	د	د
پ	د	د
د	پ	د
پ	پ	د

۵ ــ گزینه‌ی ۳ تاس در ۳ حالت فرد می‌آید (*سومی: همان ۱ و ۳ و ۵*) و در ۳ حالت زوج. سکه هم که ۲ حالت دارد. خُب تاس یا زوج می‌آید یا فرد، پس حالت‌های ممکن برابر می‌شود با:

تاس فرد آمده → پرتاب ۱ سکه: سکه (۲)، تاس (۳): $6 = 3\times2 = (2)\ (3)$ — رو یا پشت، ۱ یا ۳ یا ۵

تاس زوج آمده → پرتاب ۲ سکه: سکه‌ی ۱ (۲)، سکه‌ی ۲ (۲)، تاس (۳): $12 = 3\times2\times2 = (2)\ (2)\ (3)$ — رو یا پشت، رو یا پشت، ۲ یا ۴ یا ۶

با جمع دو عدد بالا خواهیم داشت: $6+12=\mathbf{18}$

۶ ــ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم که **به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیش‌آمد می‌گوییم**. پس تعداد پیش‌آمدها برابر تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای است. در این تست، فضای نمونه‌ای‌مان دارای ۵ عضو است. پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^5 است. در نتیجه تعداد کل پیش‌آمدها برابر $\mathbf{32 = 2^5}$ است.

۷ ــ گزینه‌ی ۳ در کل ۸ تا توپ متمایز داریم. برای انتخاب توپ اول ۸ حالت وجود دارد. آن توپی که انتخاب شده را کنار می‌گذاریم. حالا درون کیسه ۷ توپ متمایز وجود دارد که به ۷ طریق می‌توانیم یکی از

آن‌ها را انتخاب کنیم. پس طبق «اصل ضرب»، این کار را به $۵۶=۷\times۸$ حالت می‌توانیم انجام دهیم. چون فضای نمونه‌ای مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن است، در این آزمایش **فضای نمونه‌ای ۵۶ عضو خواهد داشت**. *(سومی: می‌توانستیم یک طور دیگر به این ۵۶ برسیم. ابتدا ۲ تا توپ از ۸ توپ را به $\binom{۸}{۲}$ طریق انتخاب می‌کنیم. در این انتخاب به ترتیب توپ‌ها توجهی نکرده‌ایم. این ۲ توپ یکی‌شان اول خارج می‌شود و دیگری دوم. پس به ۲ حالت می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. پس جواب نهایی برابر می‌شود با:*

$$\binom{۸}{۲}\times ۲=\frac{۸(۸-۱)}{۲}\times ۲=۵۶$$

اگر در این سؤال توپی را که دفعه‌ی اول بیرون آمد، پس از مشاهده دوباره به کیسه بازمی‌گردانیم، فضای نمونه‌ای چند حالت پیدا می‌کرد؟ جواب این سؤال گزینه‌ی ۴ است!)

۸ ـ گزینه‌ی ۳ اگر حالتی را که در پرتاب تاس اول، عدد a و در پرتاب تاس دوم، عدد b رو شود را با (a,b) نمایش دهیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش به این صورت می‌شود: $S=\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\}$ قبول ندارید که مجموعه‌ی بالا **۵ عضو** دارد؟

۹ ـ گزینه‌ی ۳ حالت‌های مختلف را در نمودار می‌بینید. داریم:

عدد رو شده در تاس
$۱ \xrightarrow{\text{پرتاب ۱ سکه}} ۲$
$۲ \xrightarrow{\text{پرتاب ۲ سکه}} ۲\times۲=۴$
$۳ \xrightarrow{\text{پرتاب ۳ سکه}} ۲\times۲\times۲=۸$
$۴ \xrightarrow{\text{پرتاب ۴ سکه}} ۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$
$۵ \xrightarrow{\text{پرتاب ۵ سکه}} ۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۳۲$
$۶ \xrightarrow{\text{پرتاب ۶ سکه}} ۲\times۲\times۲\times۲\times۲\times۲=۶۴$

با جمع‌کردن عددهای بالا، تعداد کل حالت‌ها و در نتیجه تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای را به دست می‌آوریم: $۲+۴+۸+۱۶+۳۲+۶۴=\mathbf{۱۲۶}$

۱۰ ـ گزینه‌ی ۲ چون دو عمل پشت‌سرهم را داریم انجام می‌دهیم، باید از «اصل ضرب» استفاده کنیم:

$$\underbrace{\binom{۱۰}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ سؤال گراف از ۱۰ سؤال}}\times\underbrace{\binom{۱۰}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ سؤال نظریه‌ی اعداد از ۱۰ سؤال}}$$

(سومی: کسانی که گزینه‌ی ۱ رو انتخاب کردند، هنوز توجیه نشدن «اصل ضرب» چیه!)

۱۱ ـ گزینه‌ی ۳ اگر ۲ عددی که قرار است انتخاب کنیم متمایز باشند، با $۲۱=\frac{۷(۷-۱)}{۲}=\binom{۷}{۲}$ حالت می‌توانیم این کار را انجام دهیم. ولی چون شرط متمایز بودن در صورت سؤال ذکر نشده است، حالت‌های (۱,۱)، (۲,۲)، (۳,۳)، (۴,۴)، (۵,۵)، (۶,۶) و (۷,۷) هم عضو فضای نمونه‌ای‌مان هستند!
پس تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر است با: $۲۱+۷=\mathbf{۲۸}$
(سومی: این تعداد همان تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱+x_۲+\cdots+x_۷=۲$ است. چرا؟!)

۱۲ ـ گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای چی بود؟ مجموعه‌ی همه‌ی نتایج ممکن یک آزمایش. حالا پیش‌آمد چیست؟ **به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای، یک پیش‌آمد می‌گوییم.** پس برای این‌که تعداد پیش‌آمدهای متمایز در پرتاب دو سکه را پیدا کنیم، اول باید ببینیم فضای نمونه‌ای آن آزمایش چیست؟ فضای نمونه‌ای پرتاب دو سکه به صورت {(ر,پ),(پ,ر),(پ,پ),(ر,ر)} است که ۴ عضو دارد. چون هر یک از زیرمجموعه‌های این مجموعه‌ی ۴ عضوی می‌تواند به عنوان پیش‌آمد در نظر گرفته شود، تعداد کل پیش‌آمدها برابر تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای می‌شود؛ یعنی $۱۶=۲^۴$. *(طراح: در کل یادتان باشد که اگر n(S) تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای باشد، $۲^{n(S)}$ تعداد پیش‌آمدها می‌شود. دلیل‌اش هم این است که یک مجموعه‌ی n عضوی، ۲^n تا زیرمجموعه دارد.)*

۱۳ ـ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم که **به هر عضو از فضای نمونه‌ای برآمد یا حالت می‌گوییم.** فضای نمونه‌ای پرتاب هم‌زمان یک تاس و یک سکه به صورت زیر است:

S = {(ر,۱),(ر,۲),(ر,۳),(ر,۴),(ر,۵),(ر,۶),(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)}

از میان عضوهای بالا، ۳ عضو (ر,۲)، (ر,۴) و (ر,۶) شامل یک عدد زوج و رو آمدن سکه هستند. پس تعداد برآمدها یا حالت‌های مورد نظر برابر **۳** می‌شود.

۱۴ ـ گزینه‌ی ۳ زمانی می‌گوییم یک پیش‌آمد رخ داده است که **حاصل آزمایش، یکی از اعضای پیش‌آمد باشد.** این‌جا می‌خواهیم پیش‌آمد $A=\{a,c\}$ رخ دهد. پس حاصل آزمایش باید یکی از اعضای آن باشد. در نتیجه پاسخ سؤال **{a} یا {c}** می‌شود.

۱۵ ـ گزینه‌ی ۱ اول از همه باید یک سری از این اصطلاحات را بدانید! پیش‌آمد نشدنی یا غیرممکن پیش‌آمدی است که برابر با ∅ باشد. پیش‌آمد قطعی یا حتمی پیش‌آمدی است که حتماً رخ دهد. به عبارت دیگر **پیش‌آمد قطعی یا حتمی، همان فضای نمونه‌ای است.** این را هم می‌دانید که هنگامی می‌گوییم یک پیش‌آمد رخ داده است که حاصل آزمایش، یکی از اعضای پیش‌آمد باشد. در این‌جا چون یکی از اعضای $A=\{a_۱,a_۲,a_۳\}$ که همانا $a_۳$ باشد، حاصل آزمایش است، می‌توانیم بگوییم که A رخ داده است. ولی بقیه‌ی گزینه‌ها درست نیستند. طبق آن توضیحات مفصلی که در پاسخ تست گفتیم، در این‌جا پیش‌آمد قطعی $\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴,a_۵\}$ است و پیش‌آمد نشدنی ∅ است.

۱۶ ـ گزینه‌ی ۲ وقتی می‌گوییم یک پیش‌آمد رخ داده است که حاصل آزمایش، یکی از اعضای آن پیش‌آمد باشد. این حاصل آزمایش (پشت، پشت) است. پس **پیش‌آمد {(پشت، پشت), (رو، رو)} رخ داده است.**
بررسی بقیه‌ی گزینه‌ها:
۱) پیش‌آمد {(پشت، رو)} رخ نداده است، چون حاصل آزمایش پرتاب دو سکه (پشت، رو) نبوده است.

۳ **پیش‌آمد قطعی یعنی فضای نمونه‌ای!** واضح است که {(پشت، پشت)} فضای نمونه‌ای این آزمایش نیست!

۴ **پیش‌آمد نشدنی یعنی مجموعه‌ی تهی.** همه‌ی ما قبول داریم که {(پشت، رو)} مجموعه‌ی تهی نیست!

۱۷ ـ گزینه‌ی ۲ اگر بخواهیم A رخ ندهد، باید عدد رو شده‌ی هیچ‌کدام از تاس‌ها اول نباشد. چرا که اگر دست‌کم یکی از این عددها اول باشد، A رخ می‌دهد. از میان گزینه‌ها، تنها گزینه‌ی ۲ است که هر دو عدد آن غیر اول هستند؛ یعنی **(۱,۶)**. *(سومی: دیگه لازم نیست که بگیم کدام عددها اول هستند!)*

۱۸ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس به صورت {۱,۲,۳,۴,۵,۶}است. اگر بدانیم که در پرتاب تاس، فقط عدد اول ظاهر شده‌است، فضای نمونه‌ای به صورت {۲,۳,۵} تغییر می‌کند. **تعداد کل پیش‌آمدها، برابر تعداد زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌ای است.** در این‌جا فضای نمونه‌ای ۳ عضو دارد، پس تعداد کل پیش‌آمدها برابر $۸ = ۲^۳$ می‌شود.

۱۹ ـ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم که دو نوع **فضای نمونه‌ای** داریم:

۱ **گسسته** ← مجموعه‌های متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر.

۲ **پیوسته** ← مجموعه‌های شمارش‌ناپذیر (مثل بازه‌ای از اعداد حقیقی، مساحت یک شکل هندسی یا حجم آن و ...)

در این‌جا هم با بازه‌ای از اعداد حقیقی روبه‌رو هستیم. پس فضای نمونه‌ای از نوع پیوسته است و چون این مجموعه شمارش‌پذیر نیست، تعداد عضوهایش برابر **بی‌شمار** می‌شود دیگر! *(سومی: حالا با احتمال در فضای پیوسته در بخش ۳ بیش‌تر آشنا خواهید شد. فعلاً همین را داشته باشید.)*

۲۰ ـ گزینه‌ی ۳ می‌دانیم که به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای، پیش‌آمد می‌گوییم. پس در تست هر گزینه‌ای که زیرمجموعه‌ی $S=\{۱,\Delta,a,O\}$ باشد، پیش‌آمد S به حساب می‌آید. چون ∅ زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ای است، گزینه‌ی ۱ درست است. $\{a,\Delta\}$ و $\{a,۱,\Delta\}$ هم که به‌وضوح زیرمجموعه‌ی S هستند، پس حتماً پیش‌آمد S هستند. فقط $\{-۱,O\}$ زیرمجموعه‌ی S نیست. پس گزینه‌ی ۳ نمی‌تواند به عنوان پیش‌آمد S در نظر گرفته شود.

۲۱ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای ۶ بار پرتاب‌کردن یک سکه به این صورت می‌شود:

S={(ر,ر,ر,ر,ر,ر),(پ,ر,ر,ر,ر,ر),...,(پ,پ,پ,پ,پ,پ)}

طبیعتاً ما انتظار نداریم که همه‌ی این $۶۴ = ۲^۶$ عضو فضای نمونه‌ای را بنویسید و سپس آن‌هایی را که دقیقاً سه تا «پ» دارند را جدا کنید. کاری که در این جور سؤال‌ها باید بکنید، این است که ۳ بار از ۶ بار پرتاب را انتخاب کنید. این‌کار را که بکنید، می‌توانید این ۳ بار را «پشت» فرض کنید و ۳ بار دیگر را رو. حالا به چند طریق می‌توان ۳ تا شیء را از ۶ تا شیء انتخاب کرد؟ داریم:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{\cancel{۶}\times۵\times۴}{\cancel{۶}}=\mathbf{۲۰}$$

پس این پیش‌آمد **۲۰ عضو** دارد.

(طراح: یک جور دیگر هم می‌شود به این عدد ۲۰ رسید. در واقع تعداد عضوهای این پیش‌آمد را می‌توانیم تعداد جای‌گشت‌های ۶ شیء که ۳ تای آن‌ها از نوع k_1 (رو) و ۳ تای آن‌ها از نوع k_2 (پشت) هستند در نظر بگیریم. طبق آن‌چه در آنالیز ترکیبی خواندیم، حاصل برابر $۲۰ = \frac{۶!}{۳!۳!}$ می‌شود.)

۲۲ ـ گزینه‌ی ۲ تعریف احتمال این است که $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$. خُب کار ما این است که n(A) و n(S)را پیدا کنیم. یعنی:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد عضوهای پیش‌آمد}}{\text{تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای}}$$

در این‌جا آزمایش ما انتخاب ۳ تا سیب از ۱۱ تا سیب است. پس فضای نمونه‌ای‌مان $\binom{۱۱}{۳}$ عضو دارد. پیش‌آمد ما این است که هر ۳ تا سیب «رسیده» باشند، یعنی «کال» نباشند. گفته شده که از ۱۱ تا سیب، ۵ تا «کال» هستند. پس $۶=۵-۱۱$ تا از سیب‌ها «رسیده» هستند. بنابراین تعداد عضوهای پیش‌آمدها برابر می‌شود با تعداد حالت‌های انتخاب ۳ سیب از ۶ سیب «رسیده»؛ یعنی $\binom{۶}{۳}$. حالا این دو عدد را بر هم تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۶!}{\cancel{۳!}۳!}}{\frac{۱۱!}{\cancel{۳!}۸!}}=\frac{۶!۸!}{۳!۱۱!}=\frac{۶\times۵\times۴}{۱۱\times۱۰\times۹}=\mathbf{\frac{۴}{۳۳}}$$

۲۳ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای انتخاب ۵ نفر از میان ۱۰ نفر است. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در این سؤال برابر $\binom{۱۰}{۵}$ می‌شود. حالت موردنظر ما چیست؟ حالتی که ۳ نفر از این ۵ نفر آمریکایی باشند و طبیعتاً ۲ نفر دیگر اروپایی باشند. تعداد عضوهای این پیش‌آمد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n(A)=\overbrace{\binom{۷}{۳}}^{\text{انتخاب ۳ تا از ۷ تا آمریکایی}}\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ تا از ۳ تا اروپایی}} \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۷}{۳}\binom{۳}{۲}}{\binom{۱۰}{۵}}=\frac{\frac{۷!}{۳!۴!}\times\frac{۳!}{۲!}}{\frac{۱۰!}{۵!۵!}}=\frac{۱۰۵}{۲۵۲}=\frac{۳۵}{۸۴}=\mathbf{\frac{۵}{۱۲}}$$

۲۴ ـ گزینه‌ی ۱ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس برابر است با $۳۶=۶\times۶$؛ یعنی در کل ۳۶ حالت داریم. حالا چند تا از این حالت‌ها به درد ما می‌خورند؟ یعنی «مجموع اعداد رو شده برابر ۷ می‌شود»؟ حالت‌ها را می‌نویسیم:

$$A=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$$

می‌بینیم که A دارای ۶ عضو است. پس احتمال خواسته‌شده برابر می‌شود با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\mathbf{\frac{۱}{۶}}$$

۲۵ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای در این آزمایش، $\binom{۸}{۲}$ تا عضو دارد. چون ۲ کارت را از میان ۸ کارت انتخاب کرده‌ایم. پیش‌آمد ما حالتی است که شماره‌های هر دو کارت عددی فرد باشد. در واقع تعداد حالت‌های پیش‌آمد برابر می‌شود با تعداد حالت‌های انتخاب ۲ عدد از میان عددهای ۱، ۳، ۵ و ۷. این تعداد برابر $\binom{۴}{۲}$ است. حالا با یک تقسیم ساده پاسخ سؤال معلوم می‌شود:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۶}{۲۸}=\frac{۳}{۱۴}$$

۲۶ ـ گزینه‌ی ۳ آزمایش ما انتخاب ۶ نفر از میان $۱۲=۷+۵$ نفر است که به $\binom{۱۲}{۶}$ طریق انجام می‌شود. پس تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای‌مان را به دست آوردیم.

می‌رویم سراغ پیش‌آمد گفته‌شده. این پیش‌آمد می‌گوید که «فقط یک نفر از ۶ نفر انتخاب‌شده دانشجوی مکانیک باشد». تعداد عضوهای این پیش‌آمد را به صورتی که می‌بینید محاسبه می‌کنیم:

یک نفر مکانیکی را انتخاب می‌کنیم

$$\binom{۷}{۱}\binom{۵}{۵}=۷\times۱\Rightarrow n(A)=۷$$

۵ نفر دیگر را باید از میان ۵ الکترونیکی انتخاب کنیم

بعد با یک تقسیم ساده به جواب می‌رسیم! داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{\binom{۱۲}{۶}}=\frac{۷}{\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸\times۷}{۶\times۵\times۴\times۳\times۲}}=\frac{۱}{۱۳۲}$$

۲۷ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای در این سؤال شامل همه‌ی عددهای دو رقمی است؛ یعنی ۹۰ تا عدد. پس $n(S)=۹۰$ است. حالت‌های موردنظر ما، عددهای دو رقمی‌ای هستند که مجموع ارقام‌شان برابر ۹ شود. یعنی این عددها:

$$A=\{۱۸,۸۱,۲۷,۷۲,۳۶,۶۳,۴۵,۵۴,۹۰\}$$

می‌بینیم که ۹ تا عدد هستند این‌ها! پس احتمال خواسته‌شده برابر $\frac{۹}{۹۰}$ می‌شود.

۲۸ ـ گزینه‌ی ۳ دیگر شما بهتر از ما می‌دانید که فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس، $۳۶=۶\times۶$ عضو دارد. پس در این‌جا $n(S)=۳۶$ است. حالتی که می‌خواهیم احتمال آن را حساب کنیم، حالتی است که «فقط یکی از این تاس‌ها ۳ بیاید». این حالت‌ها به صورت زیر هستند:

$$\underbrace{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)}_{\text{تاس اول ۳ بیاید}}$$

$$\underbrace{(۱,۳),(۲,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)}_{\text{تاس دوم ۳ بیاید}}$$

می‌بینیم که مجموعه‌ی A دارای ۱۰ تا عضو است. پس $n(A)=۱۰$ است.

طبق تعریف احتمال داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۲۹ ـ گزینه‌ی ۴ این‌جا فقط باید حواس‌تان به فضای نمونه‌ای باشد؛ یعنی حس نکنید که چون ۲ تاس پرتاب کرده‌ایم تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $۳۶=۶\times۶$ می‌شود. در صورتِ سؤال، شرطی داریم که «جفتِ تاس‌ها بزرگ‌تر از ۳ ظاهر شده‌اند». در واقع اعضای فضای نمونه‌ای این سؤال به صورت زیر می‌شود:

$$S=\{(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

پس فضای نمونه‌ای ۹ تا عضو در کل دارد.

(سومی: می‌توانستیم تعداد این عضوها را با استفاده از «اصل ضرب» هم حساب کنیم:

$$(\underbrace{۳}_{\text{۴ یا ۵ یا ۶}},\underbrace{۳}_{\text{۴ یا ۵ یا ۶}})\xrightarrow{\text{تعداد اعضا}}۳\times۳=۹$$

خلاصه که $n(S)=۹$ است.)

پیش‌آمد مطلوب این است که «عدد دو تاس برابر باشد». پس:

$$A=\{(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(A)=۳$$

خُب از این‌جا به بعد سؤال را دیگر نمی‌شود غلط حل کرد! داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۹}=\frac{۱}{۳}$$

۳۰ ـ گزینه‌ی ۴ در مجموع $۱۱=۵+۲+۴$ تا کتاب داریم که می‌خواهیم ۲ تا از آن‌ها را انتخاب کنیم. پس تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر $\binom{۱۱}{۲}=\frac{۱۱(۱۱-۱)}{۲}=۵۵$ می‌شود. حالا حالت مطلوب این است که موضوع دو کتاب انتخاب‌شده یکسان باشد. یعنی یا هر دو ریاضی باشند یا هر دو فیزیک یا هر دو زیست‌شناسی. تعداد این حالت‌ها را حساب می‌کنیم:

یا

$$\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{هر دو ریاضی}}+\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{هر دو فیزیک}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{هر دو زیست}}=۶+۱+۱۰=۱۷$$

پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{۱۷}{۵۵}$ می‌شود.

۳۱ ـ گزینه‌ی ۱ فرض کنید با یک تاس طرف هستیم و می‌خواهیم احتمال این‌که «عدد رو شده زوج نباشد» را حساب کنیم.

عدد رو شده نباید زوج باشد، پس حتماً باید فرد باشد؛ یعنی یکی از ۳ عدد ۱، ۳ و یا ۵. سه حالت مورد قبول داریم و می‌دانیم که پرتاب یک تاس ۶ حالت دارد. پس احتمال این‌که عدد یک تاس فرد بیاید برابر $\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$ است. حالا ما در این مسئله با ۳ تاس روبه‌رو هستیم. کاری که می‌کنیم این است که این $\frac{۱}{۲}$ را که برای یک تاس به دست آوردیم، سه بار در خودش ضرب می‌کنیم! چرا؟ چون «اصل ضرب» می‌گوید!

تاس دوم فرد بیاید

$$\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{تاس اول فرد بیاید}}\times\frac{۱}{۲}\times\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{تاس سوم فرد بیاید}}=\frac{۱}{۸}$$

۳۲ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای که واضح است! انتخاب ۲ عدد متمایز از میان ۷ عدد داده‌شده. پس تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷(۷-۱)}{۲}=۲۱$ می‌شود.

حالا برویم ترتیب پیش‌آمد را بدهیم! مجموع دو عدد چه وقت فرد می‌شود؟ وقتی که یکی زوج باشد و یکی فرد! پس یکی از عددها را باید از بین عددهای ۲، ۴، ۶ و ۸ انتخاب کنیم و دیگری را از بین ۳، ۵ و ۷. احتمال به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{انتخاب عدد زوج}}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{انتخاب عدد فرد}}=۱۲\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

۳۳ ـ گزینه‌ی ۴ در کل به ۹×۱۰ حالت دو کارت را به‌ترتیب از این کیسه‌ای که ۱۰ کارت دارد، می‌توان خارج کرد. حالت مطلوب این است که کارت دومی که خارج می‌کنیم، «کارت ۷» باشد. پس کارت اولی که خارج کرده‌ایم نباید «کارت ۷» بوده باشد! بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب برابر ۱×۹ می‌شود. احتمال موردنظر هم برابر می‌شود با تقسیم این دو تا بر هم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹\times۱}{۱۰\times۹}=\frac{۱}{۱۰}$

۳۴ ـ گزینه‌ی ۱ ابتدا تعداد کل عددهای سه‌رقمی زوج با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بدون تکرار ارقام را پیدا می‌کنیم. چون صفر بین ارقام وجود دارد، ۲ حالت داریم:

۱) یکان صفر باشد: $۵\;۴\;\underbrace{۱}_{\text{صفر}}=۵\times۴=۲۰$

۲) یکان ۲ یا ۴ باشد: $\underbrace{۴}_{\text{۰ نباشد، یک رقم هم که برای یکان مصرف شده}}\;۴\;\underbrace{۲}_{\text{۲ یا ۴}}=۴\times۴\times۲=۳۲$

پس در کل ۵۲ = ۳۲ + ۲۰ عدد داریم؛ یعنی: $n(S)=۵۲$

حالا می‌خواهیم رقم دهگان ۵ باشد:

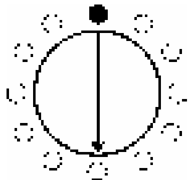
۱) یکان صفر باشد: $\underbrace{۴}_{\text{۲ رقم مصرف شده}}\;\overbrace{۱}^{\text{دهگان ۵ است}}\;\underbrace{۱}_{\text{صفر}}=۴$

۲) یکان ۲ یا ۴ باشد: $\underbrace{۳}_{\text{۲ رقم مصرف شده، صفر هم نمی‌تواند باشد}}\;\overbrace{۱}^{\text{دهگان ۵ است}}\;\underbrace{۲}_{\text{۲ یا ۴}}=۳\times۲=۶$

پس حالت‌های مطلوب ۱۰ = ۶ + ۴ است؛ یعنی: $n(A)=۱۰$

در آخر کار هم یک تقسیم ساده داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۵۲}=\frac{۵}{۲۶}$

۳۵ ـ گزینه‌ی ۲ مربی هر جایی که بنشیند، ۱۱ صندلی دیگر خالی می‌ماند که مطابق شکل روبه‌رو فقط یکی از آن‌ها روبه‌روی مربی است دیگر! پس بازی‌کُن شماره‌ی ۱۰، ۱۱ جا برای نشستن دارد که یکی از این جاها فقط روبه‌روی مربی است. پس احتمال این‌که بازی‌کُن روبه‌روی مربی بنشیند برابر $\frac{۱}{۱۱}$ می‌شود. *(سومی: دیدید چه‌قدر ساده بود؟! از روش‌های عجیب و غریب که حل نکرده‌اید این سؤال را؟! یعنی روش «جای‌گشت دایره‌ای» که دیگر در کتاب درسی حضور ندارد و لازم نیست که بلد باشیدش!)*



۳۶ ـ گزینه‌ی ۳ درون این کیسه ۱۲=۲+۴+۶ تا توپ متمایز داریم. فضای نمونه‌ای ما انتخاب ۲ تا توپ از این ۱۲ تاست. پس فضای نمونه‌ای ما $۶۶=\frac{۱۲(۱۲-۱)}{۲}=\binom{۱۲}{۲}$ عضو دارد. پیش‌آمد سؤال این است که این دو توپ ناهم‌رنگ باشند. تعداد اعضای این پیش‌آمد را به صورتی که می‌بینید حساب می‌کنیم:

$$n(A)=\overbrace{\binom{۶}{۱}}^{\text{یک توپ نارنجی}}\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{یک توپ قرمز}}+\overbrace{\binom{۴}{۱}}^{\text{یک توپ قرمز}}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یک توپ زرد}}+\overbrace{\binom{۶}{۱}}^{\text{یک توپ نارنجی}}\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{یک توپ زرد}}=۶\times۴+۴\times۲+۶\times۲=۴۴$$

خُب! محاسبه‌کردن احتمال، کاری دارد حالا؟! پاسخ برابر می‌شود با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۴}{۶۶}=\frac{۲}{۳}$$

(سومی: دقت دارید که احتمال چه‌قدر به آنالیز ترکیبی ربط دارد دیگر! پس اگر آنالیز ترکیبی را خوب بلد نیستید، زودتر دست به‌کار شوید و فصل ۶ را یاد بگیرید!)

۳۷ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این سؤال انتخاب ۳ نفر از بین ۹ = ۳ + ۳ + ۳ نفر است. پس: $n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}=۸۴$

پیش‌آمد مورد نظر سؤال این است که هر سه اهل یک کشور باشند. این پیش‌آمد ۳ حالت دارد:

«هر سه آلمانی باشند»؛ «هر سه هلندی باشند»؛ «هر سه فرانسوی باشند».

پس $n(A)=۳$ می‌شود.

طبق تعریف احتمال داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۸۴}=\frac{۱}{۲۸}$

۳۸ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ تاس، ۲۱۶=۶×۶×۶ عضو دارد. (چرا؟) پیش‌آمد این سؤال این است که «حداقل یک بار ۳ ظاهر شود». برای راحتی کار، می‌توانیم احتمال متمم این پیش‌آمد را حساب کنیم و حاصل را از ۱ کم کنیم. *(طراح: متمم پیش‌آمد A را با A′ نشان می‌دهیم و A′ در واقع پیش‌آمدی است که A رخ ندهد.)* در این‌جا متمم پیش‌آمد گفته‌شده به صورت «اصلاً عدد ۳ ظاهر نشود» است. احتمال A' را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{۵\quad۵\quad۵}_{\text{۳ نباشد، یکی از عددهای ۱، ۲، ۴، ۵ یا ۶}}=۵\times۵\times۵=۱۲۵\Rightarrow n(A')=۱۲۵$$

پس $P(A')=\frac{۱۲۵}{۲۱۶}$ می‌شود.

حالا به‌سادگی طبق رابطه‌ی $\mathbf{P(A)=1-P(A')}$، داریم:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{۱۲۵}{۲۱۶}=\mathbf{\frac{۹۱}{۲۱۶}}$$

۳۹ ـ گزینه‌ی ۴ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پرتاب ۵ سکه با هم، برابر $۳۲=۲\times۲\times۲\times۲\times۲$ است. این‌جا با دو پیش‌آمد روبه‌رو هستیم که باید اجتماع آن‌ها را پیدا کنیم. پیش‌آمد «فقط چهار سکه رو بیاید» را A و پیش‌آمد «فقط ۴ سکه پشت بیاید» را B می‌نامیم. سؤال از ما حاصل $P(A\cup B)$ را خواسته است.

می‌دانیم که $\mathbf{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$ است. پس داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\underbrace{\frac{\binom{۵}{۴}}{۳۲}}_{\text{فقط ۴ تا رو}}+\underbrace{\frac{\binom{۵}{۴}}{۳۲}}_{\text{فقط ۴تا پشت}}-\underbrace{۰}_{\text{نمی‌شود که از ۵ تا سکه‌ای که داریم، ۴ تا رو بیاید و ۴ تا هم پشت! پس احتمالش برابر صفر می‌شود.}}=\frac{۵}{۳۲}+\frac{۵}{۳۲}=\frac{۱۰}{۳۲}=\frac{۵}{۱۶}$$

۴۰ ـ گزینه‌ی ۲ برای حل این تست باید از رابطه‌ی پرکاربرد $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ استفاده کنیم. پیش‌آمد «دانشگاه قبول شدن» را A و پیش‌آمد «نفر اول مسابقات شنا شدن» را B می‌نامیم. با کمی دقت می‌توانیم بفهمیم که «دست‌کم در یکی از این مراحل موفق شود» همان پیش‌آمد $A\cup B$ است که احتمالش ۰/۸ داده شده است. با جای‌گذاری داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۸=۰/۷+۰/۴۵-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\mathbf{۰/۳۵}$$

می‌بینید که احتمال این‌که هم دانشگاه قبول شود و هم نفر اول مسابقات شنا شود برابر ۰/۳۵ به دست آمد.

۴۱ ـ گزینه‌ی ۲ از «نظریه‌ی اعداد» به خاطر داریم که **از میان عضوهای** $\{۱,۲,۳,...,n\}$، **تعداد اعداد مضرب a برابر** $\left[\frac{n}{a}\right]$ **است**. در این‌جا می‌خواهیم احتمال این را حساب کنیم که عددی که از $\{۱,۲,...,۳۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم، مضرب ۳ یا ۵ باشد. اگر پیش‌آمد «مضرب ۳ بودن» را A و «مضرب ۵ بودن» را B در نظر بگیریم، پیش‌آمد «مضرب ۳ یا ۵ بودن» برابر $A\cup B$ می‌شود. داریم:

هم مضرب ۳ و هم مضرب ۵؛ یعنی مضرب ۱۵

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{\left[\frac{۳۰۰}{۳}\right]}{۳۰۰}+\frac{\left[\frac{۳۰۰}{۵}\right]}{۳۰۰}-\frac{\left[\frac{۳۰۰}{۱۵}\right]}{۳۰۰}=\frac{۱۰۰+۶۰-۲۰}{۳۰۰}=\frac{۱۴۰}{۳۰۰}=\frac{۱۴}{۳۰}=\mathbf{\frac{۷}{۱۵}}$$

۴۲ ـ گزینه‌ی ۳ لفظ «یا» بین پیش‌آمدها، ما را به یاد اجتماع پیش‌آمدها می‌اندازد. اگر پیش‌آمد «دو تاس متوالی بیایند» را A و «یکی از تاس‌ها برابر ۴ باشد» را B در نظر بگیریم، $A\cup B$ همان پیش‌آمدی می‌شود که دنبالش هستیم. اول $P(A)$ را حساب می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس برابر $۳۶=۶\times۶$ است. تعداد حالت‌هایی که ۲ تاس، متوالی بیایند به صورت زیر می‌شود:

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۵)\}$$

این مجموعه ۱۰ عضو دارد. پس $P(A)=\frac{۱۰}{۳۶}$ می‌شود.

برویم سراغ B. باز هم فضای نمونه‌ای ۳۶ عضو دارد. حالتی که یکی از تاس‌ها برابر ۴ بیاید به این صورت می‌شود که می‌بینید:

$$B=\{(۴,۱),(۱,۴),(۴,۲),(۲,۴),(۴,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۴),(۴,۶),(۶,۴)\}$$

پس $P(B)=\frac{۱۰}{۳۶}$ است. باید $P(A\cap B)$ را هم حساب کنیم. $A\cap B$ پیش‌آمدی است که هم عددهای رو شده، متوالی باشند و هم یکی برابر ۴ باشد؛ یعنی:

$$A\cap B=\{(۴,۵),(۵,۴),(۳,۴),(۴,۳)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۴$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۴}{۳۶}$$

حالا $P(A\cup B)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱۰}{۳۶}+\frac{۱۰}{۳۶}-\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱۶}{۳۶}=\mathbf{\frac{۴}{۹}}$$

(طراح: راحت‌تر هم می‌شود جواب این سؤال را داد. چه‌گونه؟! از همان اول مجموعه‌ی $A\cup B$ را تشکیل بدهیم. یعنی پیش‌آمدی که دو تاس متوالی بیایند یا یکی برابر ۴ بیاید:

$$A\cup B=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),$$
$$(۶,۵),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۶),(۱,۴),(۲,۴),(۶,۴)\}$$

خُب! $P(A\cup B)=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$ *می‌شود.)*

۴۳ ـ گزینه‌ی ۱ تمامی روابطی که در «مجموعه‌ها» برقرارند، با تبدیل n به P برای «احتمال» برقرار خواهند بود! یعنی اگر در «مجموعه‌ها» داشتیم که $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$، می‌توانیم دو طرف را بر $n(S)$ تقسیم کنیم و به رابطه‌ی $\mathbf{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}$ برسیم! پس هر جا $n(...)$ دیدیم، به جایش $P(...)$ قرار می‌دهیم و از رابطه‌ی به‌دست‌آمده کمال استفاده را می‌کنیم. در این‌جا حاصل $P(B-A')$ را می‌خواهیم. در «مجموعه‌ها» دیدیم که $B-A'=B\cap A$ است. پس باید حاصل $P(A\cap B)$ را حساب کنیم. داریم:

$$P(A-B)=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}\frac{۲}{۳}=P(A)-P(A\cap B)$$

$$P(A')=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{P(A')=۱-P(A)}\frac{۱}{۴}=۱-P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۴}$$

در نتیجه:
$$\frac{۲}{۳}=\frac{۳}{۴}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۳}=\mathbf{\frac{۱}{۱۲}}$$

۴۴ ـ گزینه‌ی ۲ اول از همه بگوییم که **تاس همگن، سالم، نااُریب** و ... همگی اصطلاحاتی هستند به این مفهوم که، **شانس آمدن هر یک از عددهای روی تاس، با هم برابر است.** یعنی با احتمال هم‌شانس روبه‌رو هستیم. این‌جا راحت‌ترین کار این است که $A-B$ را تشکیل بدهیم. $A-B$ پیش‌آمدی است که در آن «مجموع دو تاس بیش‌تر از ۸ شود ولی هر دو تاس با هم فرد ظاهر نشوند» *(سومی: چون $A-B$ یعنی عضوهایی که عضو A هستند ولی عضو B نیستند.)* داریم:

$$A-B=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۶),(۶,۳),(۶,۴),(۶,۵),(۶,۶)\}$$

چون فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس شامل $۳۶=۶\times۶$ عضو است، داریم:

$$P(A-B)=\frac{n(A-B)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{\mathbf{۱}}{\mathbf{۴}}$$

۴۵ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس، شامل $۳۶=۶\times۶$ عضو است. حالا تعداد عضوهای پیش‌آمد خواسته‌شده را حساب می‌کنیم. پیش‌آمد این است که «مجموع دو عدد تاس برابر ۹ شود ولی دو تاس متوالی نباشند». داریم:

$$A=\{(۳,۶),(۶,۳),\underbrace{\cancel{(۴,۵)},\cancel{(۵,۴)}}_{\text{دو تاس متوالی نباید باشند}}\}\Rightarrow n(A)=۲\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۳۶}=\frac{\mathbf{۱}}{\mathbf{۱۸}}$$

۴۶ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای پرتاب یک تاس $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. پس با یک فضای نمونه‌ای ۶ عضوی طرف هستیم؛ یعنی $n(S)=۶$ است. اگر پیش‌آمد مورد نظر را A بنامیم، طبق صورت سؤال می‌خواهیم که $P(A)=\frac{۱}{۳}$ شود. پس داریم:

$$\left.\begin{aligned}P(A)&=\frac{۱}{۳}\\ n(S)&=۶\end{aligned}\right\}\xrightarrow{P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}}\frac{n(A)}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow n(A)=۲$$

می‌بینیم که پیش‌آمد مورد نظر باید «۲ عضوی» باشد. چون پیش‌آمد زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ای است، تعداد کل زیرمجموعه‌های ۲ عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۶\}$، پاسخ سؤال می‌شود؛ یعنی: $\binom{۶}{۲}=\frac{۶(۶-۱)}{۲}=\mathbf{۱۵}$

۴۷ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای، تعداد روش‌های انتخاب ۲ عدد متمایز از میان ۹ عدد است. پس $n(S)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹(۹-۱)}{۲}=۳۶$. پیش‌آمد مورد نظر ما چیست؟ هر دو عدد انتخاب‌شده فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشند؛ یعنی این دو عدد باید از میان عددهای ۵، ۷ یا ۹ انتخاب شوند. پس تعداد اعضای این پیش‌آمد برابر $\binom{۳}{۲}=۳$ است. خُب احتمال چند می‌شود؟

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{\mathbf{۱}}{\mathbf{۱۲}}$$

۴۸ ـ گزینه‌ی ۱ می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

A را پیش‌آمد «فرد بودن» و B را پیش‌آمد «اول بودن» در نظر می‌گیریم. این طوری خواهیم داشت:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\overset{\text{۱ یا ۳ یا ۵}}{\frac{۳}{۶}}+\underset{\text{۲ یا ۳ یا ۵}}{\frac{۳}{۶}}-\overset{\text{۳ یا ۵}}{\frac{۲}{۶}}=\frac{۴}{۶}=\frac{\mathbf{۲}}{\mathbf{۳}}$$

(طراح: می‌شد از همان اول $A\cup B$ را تشکیل دهیم. داریم:

$$A\cup B=\{۱,۲,۳,۵\}\Rightarrow n(A\cup B)=۴\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۴}{۶}=\frac{\mathbf{۲}}{\mathbf{۳}}$$

خسته نباشید!)

۴۹ ـ گزینه‌ی ۳ پیش‌آمد «هر دو عدد فرد» را با A و «هر دو عدد مضرب ۳» را با B نمایش می‌دهیم. سؤال از ما در واقع احتمال $A\cup B$ را می‌خواهد. می‌دانیم که فضای نمونه‌ای پرتاب ۲ تاس، $۳۶=۶\times۶$ عضو دارد. اگر بخواهیم هر دو عدد فرد باشند، هر دو عدد باید از میان اعداد $\{۱,۳,۵\}$ انتخاب شوند. پس داریم:

$$A=\{(۱,۱),(۱,۳),(۱,۵),(۳,۱),\boxed{(۳,۳)},(۳,۵),(۵,۱),(۵,۳),(۵,۵)\}$$

اگر بخواهیم هر دو عدد مضرب ۳ باشند، باید هر دوتای‌شان از میان اعداد $\{۳,۶\}$ انتخاب شوند. یعنی: $B=\{\boxed{(۳,۳)},(۳,۶),(۶,۳),(۶,۶)\}$

حالا می‌ماند حساب کردن عضوهای $A\cap B$. با یک نگاه سطحی می‌بینیم که $A\cap B=\{(۳,۳)\}$ است. پس داریم:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۹}{۳۶}+\frac{۴}{۳۶}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{\mathbf{۱۲}}{\mathbf{۳۶}}$$

۵۰ ـ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم که $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ است. اگر پیش‌آمد A را «زوج بودن» و B را «لااقل یکی مضرب ۳ بودن» در نظر بگیریم، باید $P(A)$ و $P(A\cap B)$ را پیدا کنیم. داریم:

$$A=\{(۲,\boxed{۲,۴,۶}),(۴,\boxed{۲,۴,۶}),(۶,\boxed{۲,۴,۶})\}$$

(سومی: این طرز نوشتن برای خلاصه‌نویسی است. مثلاً $(۲,\boxed{۲,۴,۶})$ یعنی $(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶)$. هیچ نکته‌ی علمی و کنکوری جالبی هم به حساب نمی‌آید.)

پس $P(A)=\frac{۹}{۳۶}$ می‌شود. می‌رویم سراغ $P(A\cap B)$:

$$A\cap B=\{(۲,۶),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۵}{۳۶}$$

طبق رابطه‌ی اول که گفتیم، داریم: $P(A-B)=\frac{۹}{۳۶}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۸}{۳۶}=\frac{\mathbf{۲}}{\mathbf{۹}}$

(طراح: می‌توانستید از اول $A\cup B$ راتشکیل دهید و ببینید که $n(A\cup B)=۴$ می‌شود. از آن‌جا هم نتیجه بگیرید که $P(A\cup B)=\frac{۴}{۳۶}=\frac{\mathbf{۱}}{\mathbf{۹}}$ می‌شود.)

۵۱ ـ گزینه‌ی ۳ احتمال این‌که پیش‌آمد B رخ دهد ولی A رخ ندهد را با $P(B-A)$ نشان می‌دهیم.

می‌دانیم که:

۱ $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

۲ $P(A')=۱-P(A)$

۳ $A'\cup B'=(A\cap B)'$

با توجه به موارد بالا خواهیم داشت:

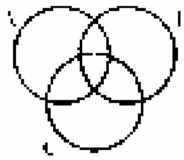
$$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\ ,\ P(B)=\frac{۲}{۳}$$

$$P(A'\cup B')=P[(A\cap B)']=۱-P(A\cap B)=\frac{۶}{۷}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۷}$$

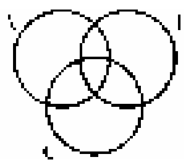
در نتیجه: $P(B-A)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۷}=\frac{۱۱}{۲۱}$

۵۲ ـ گزینه‌ی ۳ با کمی دقت می‌توانیم ببینیم که قسمت هاشورخورده، پیش‌آمد «**C رخ داده یا فقط A رخ داده است**» را نشان می‌دهد. برای محکم‌کاری پیش‌آمدهای دیگر را روی نمودار وِن نشان می‌دهیم:

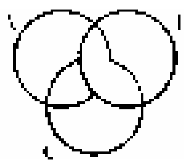
۱ A یا C رخ داده است.



۲ A و C رخ داده و B رخ نداده است.



۴ A یا C رخ داده و B رخ نداده است.



۵۳ ـ گزینه‌ی ۲ طبق تعریف احتمال داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$

در این‌جا می‌خواهیم احتمال، بیش‌تر از $\frac{۱}{۳}$ باشد و می‌دانیم که $n(S)=۶$ است. طبق آن‌چه می‌بینید، $n(A)>۲$ می‌شود:

$$\left.\begin{array}{l}P(A)>\frac{۱}{۳}\\ n(S)=۶\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{n(A)}{۶}>\frac{۱}{۳}\Rightarrow n(A)>۲$$

می‌دانیم که پیش‌آمد، زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه‌ای است. در این‌جا $n(A)>۲$ است. پس برای پیدا کردن همه‌ی پیش‌آمدها، باید تعداد زیرمجموعه‌های بزرگ‌تر از ۲ عضوی یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را پیدا کنیم، یا این‌که کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را که برابر $۶۴=۲^۶$ است، منهای زیرمجموعه‌های ۰، ۱ و ۲ عضوی کنیم. داریم:

$$۲^۶-\overbrace{\binom{۶}{۰}}^{\text{تعداد زیرمجموعه‌های صفر عضوی}}-\underbrace{\binom{۶}{۱}}_{\text{یک عضوی}}-\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{دو عضوی}}=۶۴-۱-۶-۱۵=\mathbf{۴۲}$$

۵۴ ـ گزینه‌ی ۳ وقتی با ۳ تا میله می‌توانیم یک مثلث بسازیم که مجموع اندازه‌ی هر دو ضلع، از ضلع سوم بیش‌تر باشد. در این‌جا فضای نمونه‌ای $\binom{۴}{۳}=۴$ تا عضو دارد.

حالت‌های مطلوب این‌ها هستند: $\{۲,۵,۶\}$ و $\{۵,۶,۹\}$

پس احتمال ساخته‌شدن مثلث برابر می‌شود با: $P=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲}$

۵۵ ـ گزینه‌ی ۲ در مجموع $۱۰۰=۱۳+۳۰+۵۷$ تا دانش‌آموز پایه‌ی دوم داریم. از این تعداد، ۱۳ نفر معدل‌شان زیر ۱۴ است. پس $۱۰۰-۱۳=۸۷$ نفر زیر ۱۴ نیستند. یعنی تعداد حالت‌های مطلوب ما، انتخاب یکی از این ۸۷ نفر است. پس پیش‌آمدمان ۸۷ عضو دارد و فضای نمونه‌ای‌مان ۱۰۰ عضو. احتمال این کار برابر می‌شود با: $P=\frac{۸۷}{۱۰۰}$

۵۶ ـ گزینه‌ی ۱ در این‌جا احتمالاً با یک مهندس بی‌کار روبه‌رو هستیم با این وضع مالی! *(سومی: اصلاً اگر شما دوستان از کسانی هستید که به دلتان صابون زدید که «می‌ریم دانشگاه مهندس می‌شیم، بعد ۲ سال Mazda 3 می‌خریم» پاشید همین الآن بساط‌تون رو جمع کنید برید توی کار دلالی و اینا. به تعداد موهای سرتان مهندس شاغل می‌شناسم که توی حساب بانکی‌شان همین‌قدر پول دارند که این آقاهه توی کیف پولش!)*

حالت مطلوب این است‌که یکی از اسکناس‌ها هزاری و دیگری پانصدی باشد! تعداد این حالت‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ اسکناس هزاری از ۵ تا}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ اسکناس پانصدی از ۲ تا}}=۵\times۲=۱۰\Rightarrow n(A)=۱۰$$

فضای نمونه‌ای این سؤال انتخاب ۲ اسکناس از $۷=۲+۵$ تا اسکناس است. تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷(۷-۱)}{۲}=۲۱$ است. طبق تعریف احتمال داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\mathbf{۱۰}}{\mathbf{۲۱}}$

۵۷ ـ گزینه‌ی ۲ در مجموع ۱۰ تا کتاب داریم. اگر x تای آن‌ها کتاب ریاضی باشند، $۱۰-x$ تای آن‌ها کتاب فیزیک هستند. ۲ تا از این کتاب‌ها را انتخاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای $\binom{۱۰}{۲}=\frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲}=۴۵$ عضو دارد. حالا احتمال این‌که هر دو کتاب ریاضی باشند را حساب می‌کنیم و حاصل را برابر $\frac{۷}{۱۵}$ قرار می‌دهیم. داریم:

$$P\ (\text{هر دو ریاضی})=\frac{\binom{x}{۲}}{۴۵}=\frac{۷}{۱۵}\Rightarrow\binom{x}{۲}=\frac{۷}{۱۵}\times۴۵=۲۱$$

$$\Rightarrow\frac{x(x-۱)}{۲}=۲۱\Rightarrow x(x-۱)=۴۲=۷\times۶\Rightarrow x=۷$$

پس ۷ تا کتاب ریاضی داریم. بنابراین از این ۱۰ تا کتاب، طبیعتاً باید **۳** $=۱۰-۷$ تای آن‌ها کتاب فیزیک باشند دیگر!

۵۸ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای در این‌جا انتخاب ۲ کارت از میان ۵ کارت است. پس $n(S)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵(۵-۱)}{۲}=۱۰$. حالا باید ببینیم در چند حالت اختلاف شماره‌های دو کارت برابر ۲ می‌شود. حالت‌های مطلوب این‌ها هستند گویا: $\boxed{۱,۳}\ ,\ \boxed{۲,۴}\ ,\ \boxed{۳,۵}\Rightarrow n(A)=۳$

(طراح: توجه کنید که حالت $\boxed{۱,۳}$ *با حالت* $\boxed{۳,۱}$ *فرقی ندارد ها! چون ترتیب درآوردن کارت‌ها از جعبه، موردنظر نیست در این سؤال)* طبق تعریف احتمال داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\mathbf{۳}}{\mathbf{۱۰}}$$

۵۹ ـ گزینه‌ی ۴ ۳ تا مهره را به‌طور هم‌زمان از این کیسه خارج می‌کنیم. پس فضای نمونه‌ای ما شامل $\binom{۷}{۳}$ عضو است. حالا باید حالت‌هایی را پیدا کنیم که مجموع اعداد نوشته‌شده روی این مهره‌ها عددی زوج می‌شود. یا هر سه تای این عددها باید زوج باشند یا دوتای‌شان فرد باشند و یکی زوج (چرا؟!) پس تعداد حالت‌های به‌دردبخور برابر می‌شود با:

۳ تا از میان ۲ یا ۴ یا ۶

یکی هم زوج باشد

$$\binom{۳}{۳}\underset{\text{یا}}{+}\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}=۱+۶\times۳=۱۹$$

۲ تا از میان ۱ یا ۳ یا ۵ یا ۷

با یک تقسیم ساده داریم:

$$P(A)=\frac{۱۹}{\binom{۷}{۳}}=\frac{۱۹}{\frac{۷\times۶\times۵}{۶}}=\frac{\mathbf{۱۹}}{\mathbf{۳۵}}$$

۶۰ ـ گزینه‌ی ۲ همه چیز واضح است! نگاه کنید:

انتخاب یک دختر از میان ۳ دختر

اون یکی هم باید پسر باشد!
پس یکی از پسرها را انتخاب می‌کنیم

$$P(A)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۵}{۱}}{\binom{۸}{۲}}=\frac{۳\times۵}{۲۸}=\frac{\mathbf{۱۵}}{\mathbf{۲۸}}$$

انتخاب ۲ نفر از ۸=۳+۵ نفر

۶۱ ـ گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای، انتخاب ۳ بازی‌کُن از میان $۱۰=۳+۷$ بازی‌کُن است. یعنی $n(S)=\binom{۱۰}{۳}$. حالت مطلوب حالتی است که حداکثر ۲ تا پرسپولیسی داشته باشیم؛ یعنی یا ۲ تا یا کم‌تر. می‌توانیم احتمال متمم این حالت را پیدا کنیم و حاصل را از ۱ کم کنیم. *(سومی: چون* $P(A')=۱-P(A)$ *است.)* چون کلاً ۳ بازی‌کُن انتخاب می‌کنیم، متمم حالت حداکثر ۲ تا پرسپولیسی، می‌شود ۳ تا پرسپولیسی.

داریم:

P(حداکثر ۲ تا پرسپولیسی) = ۱ − P(۳ تا پرسپولیسی)

۳ تا از ۷ تا پرسپولیسی

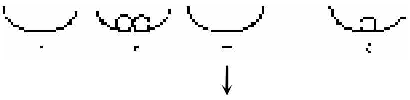
$$=۱-\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=۱-\frac{۷}{۲۴}=\frac{\mathbf{۱۷}}{\mathbf{۲۴}}$$

۶۲ ـ گزینه‌ی ۱ اول برویم سراغ فضای نمونه‌ای! چون ۳ تا عدد متمایز از مجموعه‌ی $\{۱,۲,...,۹\}$ می‌خواهیم، در واقع با انتخاب ۳ شیء از بین ۹ شیء روبه‌رو هستیم. پس $n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۶}=۸۴$ می‌شود.
حالا شما بگویید حالت‌هایی که ضرب ۳ تا عدد متمایز از این مجموعه برابر ۱۲ می‌شود، چه حالت‌هایی است؟ خُب بگویید دیگر! ۲ حالت بیش‌تر ندارد که:

$$\boxed{۱\times۲\times۶}\ \text{یا}\ \boxed{۱\times۳\times۴}\Rightarrow n(A)=۲$$

(طراح: دقت کنید که جابه‌جایی این عضوها حالت جدیدی را به‌وجود نمی‌آورد. در ضمن حالت ۱۲ = ۳ × ۲ × ۲ غیرقابل‌قبول است، چون باید عددها متمایز باشند.)
خُب به نظر شما جواب چیزی غیر از $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\mathbf{۲}}{\mathbf{۸۴}}$ است؟!

۶۳ ـ گزینه‌ی ۱ کمی ضایع است این سؤال! اول برویم سراغ فضای نمونه‌ای می‌خواهیم که سه تا عدد (متمایز یا یکسان) از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,...,۹\}$ انتخاب کنیم. برای این‌کار باید برویم سراغ آن چیزهایی که در فصل «ترکیبیات» یاد گرفتیم. در واقع شما اگر برای هر کدام از عددهای ۱ تا ۹ یک ظرف در نظر بگیرید و سه تا توپ داشته باشیم که می‌توانند در این ظرف‌ها قرار بگیرند، قضیه حل است:



۹، ۲، ۲ سه عدد انتخاب شده

در واقع این ظرف‌ها را $x_۱$، $x_۲$، ... و $x_۹$ نام‌گذاری می‌کنیم و حاصل‌جمع این x_iها را برابر ۳ می‌گذاریم. *(سومی: چون ۳ تا توپ داریم در کل.)* حالا باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_۱+x_۲+\cdots+x_۹=۳$ را به دست بیاوریم. یادمان هست که **تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی** $\mathbf{x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n}$ **برابر** $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است. پس در این‌جا تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای‌مان برابر می‌شود با:

$$\binom{۳+۹-۱}{۹-۱}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۸!۳!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹}{۳\times۲}=۱۶۵\Rightarrow n(S)=۱۶۵$$

خدا را شکر! قسمت سخت سؤال تمام شد. حالا باید حالت‌هایی را پیدا کنیم که حاصل جمع سه عدد انتخاب‌شده برابر ۷ شود. این‌ها یعنی:

$$\boxed{۱,۱,۵},\ \boxed{۱,۲,۴},\ \boxed{۱,۳,۳},\ \boxed{۲,۲,۳}$$

پس $n(A)=۴$ می‌شود. تقسیم که بلدید؟! داریم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\mathbf{۴}}{\mathbf{۱۶۵}}$$

۶۴ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای مجموعه‌ی تمام اعداد سه‌رقمی است. پس $n(S)=۹۰۰$ است. اگر عدد سه‌رقمی‌مان به صورت $\overline{abc}$ باشد، می‌خواهیم $a+b+c=۱۰$ شود. فقط باید توجه داشته باشیم که $a\geq۱$ باشد. با یک تغییر متغیر داریم:

$$\overset{a'+۱}{a}+b+c=۱۰\Rightarrow a'+b+c=۹\xrightarrow{\text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی}}$$

$$\binom{۹+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۱۱}{۲}=۵۵$$

به نظر شما همه‌ی این ۵۵ حالت قابل‌قبول هستند؟! نع! یکی از این حالت‌ها به درد ما نمی‌خورد. آن حالت این است: $a=۱۰\ ,\ b=۰\ ,\ c=۰$
عدد سه‌رقمی $\overline{abc}$ در این حالت ۱۰۰۰ می‌شود که خُب سه‌رقمی نیست دیگر! پس اگر این یک حالت را کنار بگذاریم، $۵۵-۱=۵۴$ حالت مطلوب خواهیم داشت. پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{\mathbf{۵۴}}{\mathbf{۹۰۰}}$ می‌شود.

۶۵ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش چند عضو دارد؟ باید ببینیم که ۱۰ توپ مشابه را به چند حالت می‌توانیم درون ۳ جعبه قرار دهیم. اگر تعداد توپ‌هایی که داخل جعبه‌های اول، دوم و سوم قرار می‌گیرند را به‌ترتیب x_1، x_2 و x_3 بنامیم، تعداد حالت‌های مورد نظر در واقع برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ می‌شود که برابر $\binom{10+3-1}{3-1}=\binom{12}{2}$ است. خُب حالا که تا این جای کار را رفتیم، بقیه‌ی کار خیلی سخت نیست. می‌خواهیم در جعبه‌ی اول دست‌کم ۳ توپ قرار بگیرد؛ یعنی $x_1\geq 3$ باشد. داریم:

$$x_1+x_2+x_3=10 \xrightarrow{x_1=y_1+3} y_1+x_2+x_3=7$$

$$\xrightarrow{\text{جواب‌های صحیح و نامنفی}} \binom{7+3-1}{3-1}=\binom{9}{2}$$

حالا می‌ماند همان تقسیم همیشگی که در احتمال داشتیم:

$$P(A)=\frac{\binom{9}{2}}{\binom{12}{2}}=\frac{\frac{9\times 8}{2}}{\frac{12\times 11}{2}}=\frac{9\times 8}{12\times 11}=\frac{6}{11}$$

۶۶ ـ گزینه‌ی ۴ فرق این سؤال با سؤال قبلی در این است که توپ‌های این سؤال **متمایز** هستند! یعنی با هم فرق دارند. مثلاً روی هر کدام یک شماره از ۱ تا ۱۰ نوشته شده است. فضای نمونه‌ای در این‌جا 3^{10} عضو دارد. *(طراح: چون هر کدام از این ۱۰ توپ، به ۳ حالت می‌توانند در یکی از جعبه‌ها قرار بگیرند. در واقع طبق اصل ضرب $\underbrace{3\times 3\times\cdots\times 3}_{10}=3^{10}$ می‌شود.)* حالا برای راحتیِ کار، می‌توانیم احتمال متمم این پیش‌آمد را حساب کنیم تا به جواب برسیم. متمم پیش‌آمد «در جعبه‌ی اول دست‌کم یک توپ قرار بگیرد»، این است که «همه‌ی توپ‌ها در جعبه‌های دوم و سوم باشند.» داریم:

$$P(\text{در جعبه‌ی اول دست کم یک توپ})=1-P(\text{جعبه‌ی اول خالی})$$

$$=1-\frac{2^{10}}{3^{10}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

(سومی: اگر فهمیدید که این 2^{10} از کجا آمد؟ وقتی قرار است جعبه‌ی اول خالی باشد، طبیعتاً هر توپ یا باید برود توی جعبه‌ی دوم یا سوم؛ یعنی هر توپ ۲ انتخاب دارد. پس $\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{10}=2^{10}$ انتخاب برای حالتی داریم که جعبه‌ی اول خالی باشد.)

۶۷ ـ گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای چیست؟ جا دادن ۶ نفر در ۳ اتاق. هر نفر ۳ انتخاب دارد که به کدام اتاق برود. پس تعداد حالت‌ها برای قرار گرفتن ۶ نفر در ۳ اتاق هتل برابر می‌شود با: *(سومی: حتماً می‌دانید که وقتی «نفر» گفته می‌شود، در واقع با شیء «متمایز» روبه‌رو هستیم.)*

$$3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3=3^6 \Rightarrow n(S)=3^6$$

حالت مطلوب حالتی است که در اتاق اول یک نفر، در اتاق دوم ۲ نفر و در اتاق سوم ۳ نفر قرار بگیرند. تعداد راه‌های رسیدن به این حالت را پیدا می‌کنیم:

۱ نفر از میان ۶ نفر را انتخاب می‌کنیم و در اتاق اول قرار می‌دهیم.

از ۵ نفر باقی‌مانده ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم و در اتاق دوم قرار می‌دهیم.

$$n(A)=\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3}=6\times 10\times 1=60 \Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{60}{3^6}$$

۳ نفر آخر هم یک راه بیش‌تر ندارند! باید به اتاق سوم بروند.

۶۸ ـ گزینه‌ی ۲ ۷ طبقه داریم و این ۳ نفر هر کدام در یکی از طبقه‌های این برج ساکن‌اند. فضای نمونه‌ای این سؤال، برابر $7\times 6\times 5$ است. *(طراح: چون نفر A، در یکی از ۷ طبقه ساکن است و نفر B در یکی از ۶ طبقه‌ی باقی‌مانده و نفر C در یکی از ۵ طبقه‌ی باقی‌مانده. طبق «اصل ضرب» کل نتایج ممکن برابر $7\times 6\times 5$ می‌شود.)* پیش‌آمد این سؤال این است که «خانه‌ی A بالاتر از B و خانه‌ی B بالاتر از C باشد.» تعداد عضوهای این پیش‌آمد چند تاست؟ به نظر ما که $\binom{7}{3}$ تا! چرا؟ چون از این ۷ طبقه‌ای که وجود دارد، هر ۳ طبقه‌ای را که انتخاب کنیم، یک حالت به ما می‌دهد که A بالاتر از B و B بالاتر از C باشد. پس $n(A)=\binom{7}{3}$ است.

برویم تو کار محاسبه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{7}{3}}{7\times 6\times 5}=\frac{\frac{7!}{3!4!}}{7\times 6\times 5}=\frac{\frac{7\times 6\times 5}{3!}}{7\times 6\times 5}=\frac{1}{3!}=\frac{1}{6}$$

(طراح: اگر به جای این ۷ طبقه، برج n طبقه هم بود، جواب همین $\frac{1}{6}$ می‌شد! مسئله را می‌توانید در حالت کلی هم حل کنید. با a نفر و n طبقه! البته نتایج را لطفاً به عنوان فرمول حفظ نفرمایید!)

همیشه تو حکم می‌کنی،
سه دایره سیاه:
یکی برای چشم تو،
دیگری برای چشم تو،
و دیگری برای پیشانی من.
می‌دانم که دستم را نخوانده‌ای، اما
بوی خاک باران خورده که می‌رسد،
تو هی خشت می‌زنی بی خیال
و دست من خالی است.
پس از آن همه چهره که بازی گرفتیم‌شان
فقط بی بی مانده
مات و غمزده،
یادآور خاطرات تلخ شکست.
باز دو دل می‌شوم
دلم را بازی می‌کنم
سیاهی چشم تو و پیشانی من،
دلم را می‌بُرد
و من می‌بازم

فاطمه رحیمیان

بخش ۲
پیش‌آمدهای ناسازگار و مستقل و ...

در یک نگاه

در این بخش با پیش‌آمدهای سازگار و **ناسازگار** و **مستقل** و وابسته آشنا می‌شویم. روش محاسبه‌ی احتمال در فضای نمونه‌ای **غیرهم‌شانس** را هم یاد می‌گیریم البته!

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. دو پیش‌آمد «رخ دادن عدد فرد» و «رخ دادن عدد ۶» را در نظر بگیرید. قبول دارید که در پرتاب یک تاس، این دو پیش‌آمد نمی‌توانند با هم رخ بدهند؟ بله! به پیش‌آمدهایی که **نمی‌توانند همزمان با هم رخ بدهند**، پیش‌آمدهای **ناسازگار** می‌گوییم.

پس احتمال وقوع هم‌زمان دو پیش‌آمد ناسازگار صفر است. بنابراین:

برای دو پیش‌آمد ناسازگار A و B داریم: $P(A\cap B)=\circ\ ,\ A\cap B=\varnothing$

طبیعتاً وقتی دو پیش‌آمد ناسازگار نباشند، سازگار هستند! یعنی می‌توانند با هم رخ بدهند. برای مثال در پرتاب یک تاس دو پیش‌آمد «رخ‌دادن عدد فرد» و «رخ‌دادن عدد اول» سازگار هستند. چون مثلاً اگر حاصل آزمایش ۳ یا ۵ باشد، هر دو پیش‌آمد رخ داده‌اند.

دو پیش‌آمد A و B را مستقل می‌گوییم هرگاه رخ‌دادن یکی از آن‌ها، در احتمال رخ‌دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. برای مثال فرض کنید ۲ سکه پرتاب می‌کنیم. سکه‌ی اول چه «شیر» بیاید چه «خط»، احتمال رخ‌دادن «شیر» و هم‌چنین احتمال رخ‌دادن «خط» در سکه‌ی دوم، همان عدد همیشگی $\frac{1}{2}$ است.

مهم‌ترین چیزی که باید در مورد پدیده‌های مستقل بدانیم، رابطه‌ی بین A و B است وقتی که مستقل هستند:

اگر A و B مستقل باشند $\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$

دقت کنید که؛ در پرتاب یک تاس دو پیش‌آمد «۱ آمدن» و «۳ آمدن» ناسازگارند. ولی در پرتاب دو تاس، این‌که تاس اول «۱ بیاید» و تاس دوم «۳ بیاید» دو پیش‌آمد مستقل از هم هستند.

اگر A و B دو پیش‌آمد مستقل باشند «A' و B'»، «A' و B» و «A و B'» سه جفت پیش‌آمد مستقل هستند. (چرا؟)

احتمال‌هایی که عموماً بررسی می‌کنیم، احتمال در فضای نمونه‌ای هم‌شانس هستند. **فضای نمونه‌ای هم‌شانس یعنی فضایی که احتمال رخ‌دادن هر یک از اعضای فضای نمونه‌ای برابر هم باشد.**
برای مثال در پرتاب یک تاس سالم، احتمال رخ دادن ۱ برابر احتمال رخ دادن ۲ است و ... ؛ یعنی:

$P(1)=P(2)=P(3)=\cdots=P(6)$

حالا آمدیم و این‌طور نشد! یعنی با سوالی مثل سوال زیر روبه‌رو بودیم:

به این‌جور سؤال‌ها که احتمال رخ‌دادن عضوهای مختلف فضای نمونه‌ای برابر هم نیست، احتمال **غیرهم‌شانس** می‌گوییم.

۱ تاسی طوری طراحی شده که احتمال رخ‌دادن عدد ۱، چهار برابر رخ‌دادن بقیه‌ی عددهاست. احتمال این‌که این تاس ۳ بیاید چه‌قدر است؟

تاس بی‌چاره! خلاصه باید یکی از عددهای ۱ تا ۶ بیاید.

پس: $P(1)+P(2)+\cdots+P(6)=1$ (I)

گفته شده که احتمال رخ‌دادن ۱، یعنی P(۱)، چهار برابر احتمال رخ‌دادن بقیه‌ی عددهاست. پس داریم:

$$P(۱)=۴x \qquad P(۲)=P(۳)=\cdots=P(۶)=x$$

با توجه به رابطه‌ی I خواهیم داشت:

$$\underbrace{P(۱)}_{۴x}+\underbrace{P(۲)}_{x}+\underbrace{P(۳)}_{x}+\underbrace{P(۴)}_{x}+\underbrace{P(۵)}_{x}+\underbrace{P(۶)}_{x}=۱\Rightarrow ۹x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

احتمال ۳ آمدن را می‌خواهیم:

$$P(۳)=x=\frac{۱}{۹}$$

در احتمال غیرهم‌شانس، باید مجموع احتمال‌های پیش‌آمدهای تک عضوی برابر ۱ باشد.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ـ اگر A ، B و C سه پیش‌آمد غیرتهی باشند، کدام‌یک از جفت پیش‌آمدهای زیر همواره ناسازگارند؟

۱) $A-B$ و $A-C$ ۲) $A\cap B$ و $A\cap C$ ۳) $A-B$ و $C-A$ ۴) $A\cap B$ و $B\cap C$

۲ ـ چند پیش‌آمد در پرتاب یک تاس وجود دارد که با پیش‌آمد {۱,۲} ناسازگار باشد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۳ ـ در آزمایش پرتاب یک تاس می‌دانیم $P(A)=\frac{۲}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۲}$ در این‌صورت:

۱) A و B حتماً ناسازگارند. ۲) A' و B' حتماً ناسازگارند. ۳) A و B حتماً سازگارند. ۴) A' و B' حتماً سازگارند.

۴ ـ اگر A و B دو پیش‌آمد غیرتهی باشند به‌طوری‌که $P(A'\cup B)+P(A)=۱+P(B)$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) A و B سازگارند. ۲) A' و B سازگارند. ۳) A و B' سازگارند. ۴) A' و B' سازگارند.

۵ ـ اگر A پیش‌آمد «مضرب ۳ آمدن» در پرتاب یک تاس باشد و پیش‌آمدهای A و B و هم‌چنین پیش‌آمدهای A' و B' ناسازگار باشند، P(B) کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) نمی‌توان گفت

۶ ـ پیش‌آمد «زوج آمدن در پرتاب یک تاس» با چند تا از پیش‌آمدهای «عدد اول آمدن در پرتاب یک تاس»، «رو آمدن در پرتاب یک سکه» و «۵ آمدن در پرتاب یک تاس» ناسازگار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۷ ـ پیش‌آمد «مجموع ۹ آمدن در پرتاب دو تاس» با کدام‌یک از پیش‌آمدهای زیر ناسازگار است؟

۱) یک تاس ۵ آمدن ۲) هر دو تاس مضرب ۳ آمدن

۳) حاصل‌ضرب دو عدد رو شده فرد شدن ۴) یک تاس کوچک‌تر از ۴ آمدن

۸ ـ A و B دو پیش‌آمد مختلف در پرتاب یک تاس هستند. در کدام‌یک از حالات زیر پیش‌آمدهای A و B ممکن است مستقل باشند؟

۱) $n(A)=n(B)=۲$ ۲) $n(A)=n(B)=۳$ ۳) $n(A)=۲$ و $n(B)=۴$ ۴) $n(A)=۳$ و $n(B)=۴$

۹ ـ چهار مهره به شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را در ظرفی ریخته‌ایم. دو مهره به‌تصادف خارج می‌کنیم. اگر A پیش‌آمد آن باشد که مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۵ و B پیش‌آمد آن باشد که اختلاف شماره‌های دو مهره برابر ۱ باشد، در این‌صورت:

۱) A و B مستقل و سازگارند. ۲) A و B مستقل و ناسازگارند.

۳) A و B وابسته و سازگارند. ۴) A و B وابسته و ناسازگارند.

۱۰ ـ در یک فضای نمونه‌ای هم‌شانس با ۴ برآمد، A و B پیش‌آمدهای ۲ عضوی و مستقل‌اند. $A'\cap B'$ چند عضو دارد؟

۱) عضوی ندارد. ۲) یک عضو ۳) دو عضو ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۱۱ ـ در آزمایش پرتاب تاس می‌دانیم که $A=\{۱,۲\}$ ، $B=\{۱,۲,۳\}$ و $C=\{۲,۳,۶\}$ است. در این‌صورت:

۱) A و B ناسازگارند. ۲) A و B مستقل‌اند. ۳) A و C ناسازگارند. ۴) A و C مستقل‌اند.

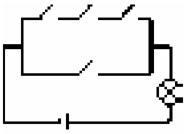
۱۲ ـ در جعبه‌ای ۱۰ لامپ وجود دارد که می‌دانیم ۴ تای آن‌ها سوخته است. یک لامپ از این جعبه خارج کرده و بدون جای‌گذاری لامپ دیگری خارج می‌کنیم. احتمال آن‌که هر دو لامپ سالم باشند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۳ ـ در مسابقات جام ملت‌های آسیا، احتمال آن‌که ایران از گروه خود صعود کند ۰/۸ است. اگر از گروه خود صعود کند، احتمال آن‌که در مسابقه‌ی یک چهارم نهایی برنده شود ۰/۶ و اگر مسابقه‌ی یک چهارم نهایی را ببرد، احتمال آن‌که بازی نیمه نهایی را نیز ببرد ۰/۵ است. به چه احتمالی ایران به بازی فینال می‌رسد؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۳ ۴) ۰/۲۴

۱۴ ـ در شکل روبه‌رو احتمال این‌که هر کدام از کلیدها بسته باشد $\frac{۱}{۲}$ است. احتمال آن‌که لامپ روشن شود، چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۷}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۹}{۱۶}$ ۴) $\frac{۵}{۸}$

۱۵ ـ سه دستگاه در یک کارخانه مستقل از یک‌دیگر هرکدام با احتمال $\frac{۱}{۲}$ کار می‌کنند. احتمال این‌که لااقل یکی از این دستگاه‌ها کار کند، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱۶ ـ سه تیرانداز A ، B و C به احتمال‌های ۰/۳، ۰/۴ و ۰/۵ در هر بار پرتاب به هدف می‌زنند. اگر هر کدام یک تیر پرتاب کنند، به چه احتمالی فقط B به هدف می‌زند؟

۱) ۰/۰۹ ۲) ۰/۱۴ ۳) ۰/۳۵ ۴) ۰/۴

۱۷ ـ یک مسئله‌ی احتمال به سه ریاضی‌دان از کشورهای ایران، آمریکا و فرانسه داده شده است. اگر احتمال پاسخ‌گویی به مسئله توسط هریک از آن‌ها به‌ترتیب برابر ۰/۸، ۰/۵ و ۰/۴ باشد، به چه احتمالی فقط یک نفر از این ریاضی‌دان‌ها به مسئله پاسخ می‌دهد؟

۱) ۰/۲۴ ۲) ۰/۳۰ ۳) ۰/۳۴ ۴) ۰/۳۸

۱۸ ـ احتمال آن‌که بابک در کنکور قبول شود ۰/۵ و احتمال آن‌که در جام جهانی بعدی آرژانتین قهرمان شود ۰/۳ است. احتمال آن‌که بابک در کنکور قبول شود یا آرژانتین قهرمان شود، کدام است؟

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۹۵

۱۹ ـ A و B دو پیش‌آمد غیرتهی و ناسازگارند. در این‌صورت:

۱) A و B حتماً مستقل‌اند. ۲) A و B حتماً وابسته‌اند.

۳) A' و B' حتماً مستقل‌اند. ۴) A و B ممکن است مستقل یا وابسته باشند.

۲۰ ـ در آزمایش پرتاب هم‌زمان سه سکه کدام پیش‌آمد مستقل از پیش‌آمد «آمدن رو در پرتاب اول» است؟

۱) هر سه سکه رو آمدن ۲) رو آمدن در دو پرتاب اول

۳) پشت آمدن در دو پرتاب اول ۴) پشت آمدن در پرتاب‌های دوم و سوم

۲۱ ـ احتمال زنده نماندن در یک عمل پیوند ریه برابر ۰/۳ است. اما بدن فرد عمل‌شده به احتمال ۰/۴ ممکن است تا یک ماه پس از عمل پیوند را قبول نکند و فرد بمیرد. احتمال زنده‌ماندن فرد بعداز یک ماه از گذشت عمل چه‌قدر است؟

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۸ ۳) ۰/۲۸ ۴) ۰/۴۲

۲۲ ـ کوروش و برمک در آزمون ورودی مؤسسه‌ی آتش‌نشانی شرکت کرده‌اند که در این آزمون از میان ۱۰۰ نفر شرکت کننده، ۵ نفر برتر پذیرفته می‌شوند. اگر احتمال قبول‌شدن کوروش ۰/۱ و احتمال قبول‌شدن برمک ۰/۲ باشد، احتمال این‌که هر دو نفر پذیرفته شوند چه‌قدر است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۰۲ ۳) ۰/۱۵ ۴) نمی‌توان تعیین کرد.

۲۳ ـ اگر A و B' دو پیش‌آمد مستقل باشند و $P(A\Delta B)=P(A)$ باشد، کدام گزینه درست است؟

۱) $P(A)=\frac{۱}{۲}$ ۲) $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ۳) $P(A)=\frac{۱}{۴}$ ۴) $P(B)=\frac{۱}{۴}$

۲۴ ـ اگر A و B دو پیش‌آمد باشند به‌طوری‌که $P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}$ و $P(A-B)=\frac{۱}{۳}$ باشد، حاصل $P(B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۲۵ ـ در آزمایش پرتاب دو تاس، A پیش‌آمد آن است که «مجموع دو عدد رو شده برابر ۷ باشد» و B پیش‌آمدی مستقل از پیش‌آمد A است. در این‌صورت $B-A$ چند برابر $A\cap B$ عضو دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

۲۶ ـ اگر A و B دو پیش‌آمد مستقل باشند، حاصل $P(A')+P(A\cap B)$ کدام است؟

۱) $P(A\cup B)$ ۲) $P(A\cup B')$ ۳) $P(A'\cup B)$ ۴) $P(A'\cup B')$

۲۷ ـ در فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d,e\}$ می‌دانیم $P(a)=\frac{۱}{۳}$ و احتمال وقوع بقیه‌ی برآمدها با هم برابر است. احتمال پیش‌آمد $\{a,b,c\}$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۲۸ ـ در آزمایش «دو سکه پرتاب می‌کنیم، اگر هر دو سکه رو آمد یک سکه‌ی دیگر وگرنه دو سکه‌ی دیگر پرتاب می‌کنیم» فضای نمونه‌ای دارای .... عضو .... است.

۱) ۷ ـ هم‌شانس ۲) ۷ ـ غیرهم‌شانس ۳) ۱۴ ـ هم‌شانس ۴) ۱۴ ـ غیرهم‌شانس

۲۹ ـ احتمال باردار شدن یک خرگوش ماده در فصل‌های تابستان و پاییز برابر هم، نصف احتمال باردار شدنش در فصل بهار و دو برابر احتمال باردار شدنش در فصل زمستان است. احتمال آن‌که دو خرگوش ماده هر دو در بهار باردار شوند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $\frac{۱۶}{۸۱}$ ۴) $\frac{۲۵}{۸۱}$

۳۰ ـ یک تاس طوری طراحی شده که در آن شانس آمدن هر عدد اول سه برابر شانس آمدن هر عدد غیر اول است. احتمال آن که در پرتاب این تاس عدد رو شده زوج باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۵}{۱۲}$

۳۱ ـ یک تاس طوری طراحی شده که شانس رخ دادن هر وجه با عدد روی آن وجه متناسب است. احتمال آن‌که در دو بار پرتاب این تاس هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴۹}$ ۲) $\frac{۴}{۴۹}$ ۳) $\frac{۹}{۴۹}$ ۴) $\frac{۱۶}{۴۹}$

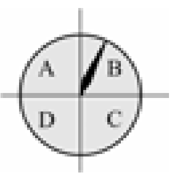
۳۲ ـ در یک مسابقه‌ی اسب‌دوانی سه اسب به نام‌های بادپا، کَهَر و کُرَند شرکت کرده‌اند. احتمال پیروزی بادپا سه برابر احتمال پیروزی کهر و احتمال پیروزی کهر دو برابر احتمال پیروزی کرند است. احتمال آن‌که کهر یا کرند مسابقه را ببرند کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۳۳ ـ در فضای نمونه‌ای $S=\{a,b,c,d\}$ می‌دانیم $P(\{a,b,c\})=\frac{۳}{۵}$ و $P(\{b,d\})=\frac{۴}{۷}$ است. حاصل $P(b)$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۶}{۳۵}$ ۴) $\frac{۱۲}{۳۵}$

۳۴ ـ در دستگاه روبه‌رو دایره به ۴ منطقه‌ی A ، B ، C و D تقسیم شده است. اگر احتمال ایستادن عقربه در منطقه‌ی A دو برابر احتمال ایستادن عقربه در منطقه‌ی B و سه برابر ایستادن در منطقه‌ی C و چهار برابر ایستادن عقربه در منطقه‌ی D باشد، احتمال آن‌که عقربه در منطقه‌ی B بایستد چه‌قدر است؟



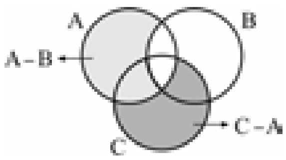
۱) $\frac{۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۳}{۲۵}$ ۳) $\frac{۴}{۲۵}$ ۴) $\frac{۶}{۲۵}$

۳۵ ـ یک سکه‌ی ناسالم را دوبار پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال این‌که هر دو بار سکه رو بیاید برابر $\frac{۴}{۹}$ باشد، احتمال آن‌که فقط یک بار سکه پشت بیاید چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ـ گزینه‌ی ۳ برای این‌که دو پیش‌آمد ناسازگار باشند، باید اشتراک‌شان تهی باشد. نمودار وِن دو پیش‌آمد $A-B$ و $C-A$ را نگاه کنید:



می‌بینیم که دو مجموعه اشتراک ندارند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $\mathbf{A-B}$ و $\mathbf{C-A}$ همواره ناسازگارند. *(سومی: شکل گزینه‌های دیگر را بکشید و ببینید که با هم اشتراک دارند!)*

۲ ـ گزینه‌ی ۳ در پرتاب یک تاس، واضح است که فضای نمونه‌ای برابر $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است. تعداد پیش‌آمدهای ناسازگار با $\{۱,۲\}$ را می‌خواهیم. این پیش‌آمد قطعاً ۱ یا ۲ را ندارد اما می‌تواند عضوهای ۳، ۴، ۵ و یا ۶ را داشته یا نداشته باشد. پس داریم:

۶	۵	۴	۳	۲	۱
۲ حالت	۲ حالت	۲ حالت	۲ حالت	۱ حالت	۱ حالت

پس تعداد پیش‌آمدهای به‌دردبخور برابر می‌شود با: $۲\times۲\times۲\times۲=\mathbf{۱۶}$

(سومی: یک جورایی مثل این می‌ماند که بگوییم «مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ چند زیرمجموعه دارد که نه ۱ را داشته باشد نه ۲؟»)

۳ ـ گزینه‌ی ۳ قبول دارید که $۱<\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۳}$ است؟ پس هرکاری که بکنیم، نمی‌شود که A و B اشتراک نداشته باشند. *(طراح: دلیل ریاضی:)*

$$P(A\cup B)=\underset{\frac{۲}{۳}}{\underset{\downarrow}{P(A)}}+\underset{\frac{۱}{۲}}{\underset{\downarrow}{P(B)}}-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۲}-P(A\cup B)=\frac{۷}{۶}-\underbrace{P(A\cup B)}>۰$$

احتمال یک پدیده همواره کوچک‌تر مساوی ۱ است.

چون $P(A\cap B)>۰$ است، A و B حتماً اشتراک دارند.)

وقتی A و B حتماً اشتراک دارند، می‌شود گفت که **A و B حتماً سازگارند.**

رد بقیه‌ی گزینه‌ها:

۱ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ ناسازگار نیستند.

۲ با همان A و B در بررسی گزینه‌ی قبل، $A'=\{۵,۶\}$ و $B'=\{۴,۵,۶\}$ می‌شود که ناسازگار نیستند.

۴ فرض کنید که $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۴,۵,۶\}$ باشد. $A'=\{۵,۶\}$ و $B'=\{۱,۲,۳\}$ می‌شود که ناسازگارند.

۴ ـ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم‌که $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ و $P(A')=۱-P(A)$ است. عبارت داده شده را ساده می‌کنیم:

$$\boxed{P(A'\cup B)}+P(A)=۱+P(B)\Rightarrow\boxed{\underbrace{P(A')+\cancel{P(B)}-P(A'\cap B)}}+P(A)$$

$$=۱+\cancel{P(B)}$$

$$۱-P(A'\cap B)=۱\Rightarrow P(A'\cap B)=۰$$

وقتی احتمال $A'\cap B$ برابر صفر است، پس $A'\cap B=\varnothing$ است. بنابراین دو پیش‌آمد A' و B ناسازگارند. با این حساب گزینه‌ی ۲ نادرست است. *(سومی: بقیه‌ی گزینه‌ها هم با توجه به این‌که $A'\cap B=\varnothing$ است، به‌راحتی اثبات می‌شوند)*

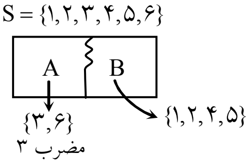
۵ ـ گزینه‌ی ۳ دو مورد گفته‌شده در صورت تست را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

۱ پیش‌آمدهای A و B ناسازگارند: $A\cap B=\varnothing$

۲ پیش‌آمدهای A' و B' ناسازگارند: $A'\cap B'=\varnothing$

تنها حالتی که ممکن است دو عبارت بالا با هم برقرار باشند، حالتی است که کل فضای نمونه‌ای به دو پیش‌آمد A و B افراز شده باشد یا به عبارت دیگر A و B متمم باشند. *(طراح: چون در حالت‌های دیگر که $A\cap B=\varnothing$ است ولی اجتماع‌شان کل فضای نمونه‌ای نیست، مجموعه‌ی $A'\cap B'$ دیگر $\varnothing$ نمی‌شود. یک شکل بکشید برای خودتان و ببینید چه می‌گوییم!)*

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$



حاصل $P(B)$ را می‌خواهیم: $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\mathbf{\frac{۲}{۳}}$

۶ ـ **گزینه‌ی ۲** دو پیش‌آمد وقتی ناسازگارند که نتوانند با هم رخ بدهند. پیش‌آمدهای گفته‌شده را می‌نویسیم:

«زوج آمدن در پرتاب یک تاس» $\{۲,۴,۶\}$

«عدد اول آمدن در پرتاب یک تاس» $\{۲,۳,۵\}$

«رو آمدن در پرتاب یک سکه» $\{رو\}$

«۵ آمدن در پرتاب یک تاس» $\{۵\}$

می‌بینیم که «زوج آمدن در پرتاب یک تاس» با «۵ آمدن» نمی‌توانند با هم رخ بدهند. پس ناسازگارند. ولی حواستان باشد که یک تاس می‌تواند زوج بیاید و یک سکه هم رو! چون این دو پیش‌آمد می‌توانند با هم رخ بدهند، پس سازگارند. *(سومی: یعنی فکر نکنید هر دو پیش‌آمدی که اشتراک‌شان $\varnothing$ بود، ناسازگارند. آن $\varnothing$ بودن مال موقعی است که فضای نمونه‌ای‌ها یکسان باشد. در واقع به این نوع پیش‌آمدها مستقل می‌گویند.)*

۷ ـ **گزینه‌ی ۳** دو پیش‌آمد A و B را ناسازگار می‌گوییم هرگاه $A\cap B=\varnothing$ باشد. پیش‌آمد «مجموع ۹ آمدن در پرتاب ۲ تاس» را می‌نویسیم:

$$A=\{(۳,۶),(۶,۳),(۴,۵),(۵,۴)\}$$

حالا گزینه‌ها را با عضوهای‌شان نشان می‌دهیم:

۱ یک تاس ۵ بیاید:

$$B=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),\underbrace{(۴,۵)}_{\text{با A اشتراک دارد}},(۶,۵),(۵,۱),(۶,۶)\}$$

۲ هر دو تاس مضرب ۳ بیایند:

$$C=\{(۳,۳),\underbrace{(۳,۶),(۶,۳)}_{\text{با A اشتراک دارد}},(۶,۶)\}$$

۳ حاصل‌ضرب دو عدد روشده فرد شدن:

$$D=\{(۱,۱),(۳,۳),(۵,۵),(۱,۵),(۵,۱),(۳,۵),(۵,۳),(۱,۳),(۳,۱)\}$$

چون $A\cap D=\varnothing$ است، A و D دو پیش‌آمد ناسازگار هستند.

۴ یک تاس کوچک‌تر از ۴ بیاید:

$$E=\{\underbrace{(۳,۶),(۶,۳)}_{\text{با A اشتراک دارد}},\ldots\}$$

۸ ـ **گزینه‌ی ۴** برای این‌که A و B مستقل باشند، باید رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ برقرار باشد.

ابتدا برای هریک از گزینه‌ها، حاصل $P(A)P(B)$ را پیدا می‌کنیم:

۱ $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۱}{۹}$

۲ $P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\ ,\ P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۱}{۴}$

۳ $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(B)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۲}{۹}$

۴ $P(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\ ,\ P(B)=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow P(A)P(B)=\frac{۱}{۳}$

فقط در **گزینه‌ی ۴** است که ممکن است این اتفاق بیافتد. مثلاً به ازای $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵\}$ که $A\cap B=\{۲,۳\}$ می‌شود. *(سومی: چون آزمایش ما پرتاب یک تاس است و مخرج هر پیش‌آمدی $n(S)=۶$ است، احتمال هر پیش‌آمدی هم باید ۰، $\frac{۱}{۶}$، $\frac{۲}{۶}$، $\frac{۳}{۶}$، $\frac{۴}{۶}$، $\frac{۵}{۶}$ و یا ۱ بشود. پس $P(A\cap B)$ نمی‌تواند برابر $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۴}$ یا $\frac{۲}{۹}$ بشود.)*

۹ ـ **گزینه‌ی ۱** فضای نمونه‌ای «انتخاب ۲ مهره از ۴ مهره» است. پس:

$$n(S)=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times ۳}{۲}=۶$$

حالت‌هایی که مجموع شماره‌های دو مهره برابر ۵ می‌شود، این دو حالت هستند:

$$۴\ ۱\qquad ۳\ ۲\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

حالت‌هایی که اختلاف شماره‌های دو مهره برابر ۱ باشد این‌ها هستند:

$$۲\ ۱\qquad ۳\ ۲\qquad ۴\ ۳\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

حالا $A\cap B$ را پیدا می‌کنیم:

$$۳\ ۲\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$$

حالا رسیدیم به نتیجه‌گیری:

۱ چون $A\cap B\neq\varnothing$ است، A و B **سازگارند.**

۲ چون $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ است، A و B مستقل‌اند.

۱۰ ـ **گزینه‌ی ۲** وقتی گفته می‌شود که «فضای نمونه‌ای هم شانس است» یعنی احتمال وقوع هرکدام از برآمدها (حالت‌ها) یکسان است. این‌جا ۴ برآمد داریم؛ یعنی فضای نمونه‌ای S دارای ۴ عضو است. A و B مستقل از هم هستند، پس رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ باید بین آن‌ها برقرار باشد:

$$P(A\cap B)=\underbrace{P(A)}_{\frac{۲}{۴}}\ \underbrace{P(B)}_{\frac{۲}{۴}}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۴}\xrightarrow{n(S)=۴}n(A\cap B)=۱$$

پس $A\cap B$ یک مجموعه‌ی یک عضوی است. تعداد اعضای $A'\cap B'$ را می‌خواهیم:

$$n(A'\cap B')=n[(A\cup B)']=\overset{۴}{\cancel{n(S)}}-n(A\cup B)$$

دمُرگان

$$=۴-[\overset{۲}{\cancel{n(A)}}+\overset{۲}{\cancel{n(B)}}-\overset{۱}{\cancel{n(A\cap B)}}]=۴-۳=۱\Rightarrow \mathbf{n(A'\cap B')=۱}$$

۱۱ ـ **گزینه‌ی ۴** بررسی تک‌تک گزینه‌ها:

۱ چون $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۱,۲,۳\}$ با هم اشتراک دارند، A و B ناسازگار نیستند.

۲ آزمایش این تست پرتاب تک تاس است. پس $S=\{۱,۲,...,۶\}$ است. داریم:

$$P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$A\cap B=\{۱,۲\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

چون $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ است، A و B مستقل نیستند.

۳ چون $A=\{۱,\boxed{۲}\}$ و $C=\{\boxed{۲},۳,۶\}$ اشتراک دارند، دو پدیده‌ی سازگار به حساب می‌آیند، نه ناسازگار.

۴ اگر تا این‌جا درست رفته باشیم، این گزینه باید جواب باشد.

نگاه کنید: $P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\ ,\ P(C)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

$P(A\cap C)=\frac{۱}{۶}$

چون $P(A\cap C)=P(A)P(C)$ است، **A و C مستقل‌اند.**

۱۲ ـ گزینه‌ی ۳ **روش اول:** فضای نمونه‌ی ما خارج‌کردن دو لامپ بدون جای‌گذاری است؛ یعنی ابتدا به ۱۰ روش یکی از ۱۰ لامپ را خارج می‌کنیم. حالا $۹=۱-۱۰$ لامپ درون جعبه داریم. به ۹ روش لامپ بعدی را خارج می‌کنیم. طبق اصل ضرب داریم: $n(S)=۱۰\times۹=۹۰$

حالت مطلوب‌مان حالتی است که هر دو لامپ سالم باشند. درون جعبه $۶=۴-۱۰$ لامپ سالم داریم. به ۶ روش لامپ سالم اول را خارج می‌کنیم. حالا درون جعبه $۵=۱-۶$ لامپ سالم دیگر داریم. به ۵ روش هم لامپ سالم بعدی را خارج می‌کنیم. پس داریم: $n(A)=۶\times۵=۳۰$

باز هم یک تقسیم ساده داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۹۰}=\frac{۱}{۳}$

روش دوم: چون خارج‌کردن لامپ و پس از آن خارج‌کردن یک لامپ دیگر بدون جای‌گذاری دو پدیده‌ی مستقل هستند، پس احتمال اشتراک آن‌ها برابر حاصل‌ضرب احتمال تک‌تک آن‌هاست:

P(هردو سالم باشد) = P(اولی سالم باشد) P(دومی سالم باشد)

$=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۵}{۹}=\frac{۱}{۳}$

۱۳ ـ گزینه‌ی ۴ می‌خواهیم حساب کنیم به چه احتمالی ایران به بازی فینال می‌رسد. برای رسیدن به بازی فینال، ایران باید مراحل زیر را طی کند:

گروه $\xrightarrow{۰/۸}$ یک چهارم نهایی $\xrightarrow{۰/۶}$ نیمه نهایی $\xrightarrow{۰/۵}$ فینال

ایران باید هر سه مرحله را پشت سر بگذارد و چون این سه مرحله پشت‌سرهم هستند و به صورت یک رشته دنبال هم هستند. با توجه به این‌که احتمال‌ها مستقل از هم هستند، احتمال رسیدن از «گروه» به «فینال» از ضرب سه احتمال مراحل میانی به دست می‌آید: $P(\text{رسیدن به فینال})=۰/۸\times۰/۶\times۰/۵=$ **۰/۲۴**

۱۴ ـ گزینه‌ی ۳ برای روشن‌شدن لامپ، باید جریان در مدار برقرار شود. پس یا باید هر سه کلید شاخه‌ی بالایی بسته باشند یا کلید شاخه‌ی پایینی بسته باشد. پس داریم:

P(روشن شدن لامپ) = P(سه کلید شاخه‌ی بالا بسته) + P(کلید شاخه‌ی پایین بسته)

یا

۳ کلید مستقل از هم هستند و احتمال بسته‌بودن همه‌شان برابر ضرب احتمال تک‌تک‌شان درهم است.

− P(هر دو شاخه بسته باشد)

$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۹}{۱۶}$

۱۵ ـ گزینه‌ی ۳ احتمال این‌که «لااقل یکی از دستگاه‌ها کار کند» متمم حالتی است که «هیچ‌کدام از دستگاه‌ها کار نکند» چون دستگاه‌ها مستقل از هم کار می‌کنند، می‌توانیم برای پیدا کردن احتمال این‌که «نه A کار کند، نه B کار کند و نه C کار کند»، احتمال تک‌تک کار نکردن‌ها را در هم ضرب کنیم:

$\underbrace{P(\text{لااقل یک دستگاه کار کند})=۱-P(\text{هیچ دستگاهی کار نکند})}_{\text{متمم هم هستند؛ پس } P(A')=۱-P(A) \text{ است}}$

$\Rightarrow P(\text{لااقل یک دستگاه کار کند})$

$=۱-\underbrace{P(\text{A کار نکند})}_{۱-\frac{۱}{۲}}\ \underbrace{P(\text{B کار نکند})}_{۱-\frac{۱}{۲}}\ \underbrace{P(\text{C کار نکند})}_{۱-\frac{۱}{۲}}=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$

(سومی: برفی هواس‌پرت‌ها هم ممکن است از فرمول $P(A\cup B\cup C)$ سؤال را حل کنند که فیلی طولانی می‌شود.)

۱۶ ـ گزینه‌ی ۲ پرتاب‌های این سه تیرانداز مستقل از هم هستند. پس اشتراک‌شان برابر حاصل‌ضرب تک‌تک‌شان است. می‌خواهیم «فقط B به هدف بزنند»؛ یعنی B به هدف بزند ولی A و C به هدف نزنند. پس داریم:

$P(\text{فقط B به هدف بزند})=P(A'\cap B\cap C')$

$=\underbrace{P(A')}_{۱-۰/۳}\underbrace{P(B)}_{۰/۴}\underbrace{P(C')}_{۱-۰/۵}=۰/۷\times۰/۴\times۰/۵=\mathbf{۰/۱۴}$

۱۷ ـ گزینه‌ی ۳ این ریاضی‌دان‌ها به صورت مستقل مسئله‌ها را حل می‌کنند طبیعتاً! *(سومی: یعنی از روی دست هم تقلب نمی‌کنند.)* حالا می‌خواهیم «فقط یک نفر از این ریاضی‌دان‌ها به مسئله پاسخ بدهد»؛ یعنی با حالت‌های زیر روبه‌رو هستیم:

«C بدهد، A و B ندهند» یا «B بدهد، A و C ندهند» یا «A بدهد، B و C ندهند»

$P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)$

مستقل / مستقل / مستقل

$\underbrace{P(A)}_{۰/۸}\underbrace{P(B')}_{۱-۰/۵}\underbrace{P(C')}_{۱-۰/۴}+\underbrace{P(A')}_{۱-۰/۸}\underbrace{P(B)}_{۰/۵}\underbrace{P(C')}_{۱-۰/۴}+\underbrace{P(A')}_{۱-۰/۸}\underbrace{P(B')}_{۱-۰/۵}\underbrace{P(C)}_{۰/۴}$

با یک سری جمع و ضرب به پاسخ سؤال می‌رسیم:

$۰/۸\times۰/۵\times۰/۶+۰/۲\times۰/۵\times۰/۶+۰/۲\times۰/۵\times۰/۴$

$=۰/۲۴+۰/۰۶+۰/۰۴=\mathbf{۰/۳۴}$

۱۸ ـ گزینه‌ی ۲ دو پیش‌آمد «قبولی بابک در کنکور» و«قهرمانی آرژانتین در جام‌جهانی بعدی» دو پیش‌آمد مستقل هستند؛ یعنی اتفاق افتادن یا نیفتادن یکی، روی احتمال وقوع دیگری تأثیری ندارد. می‌دانیم هرگاه دو پیش‌آمد A و B مستقل از یکدیگر باشند، رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ میان آن‌ها برقرار است. در این‌جا «قبولی بابک» را A و «قهرمانی آرژانتین» را B در نظر می‌گیریم. داریم:

$P(\underset{\text{یا}}{A\cup B})=P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A)P(B)}=۰/۵+۰/۳-۰/۵\times۰/۳=\mathbf{۰/۶۵}$

۱۹ ــ گزینه‌ی ۲ چون A و B دو پیش‌آمد ناسازگار هستند، پس می‌شود گفت که: $A\cap B=\varnothing$

می‌دانیم دو پیش‌آمد وقتی مستقل هستند که شرط زیر برقرار باشد:

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

چون در این تست $A\cap B=\varnothing$ است، پس می‌توان نتیجه گرفت که:

$P(A\cap B)=0$

چون گفته شده است که A و B دو پیش‌آمد غیرتهی هستند، احتمال هیچ‌کدام‌شان صفر نیست: $P(A)\neq 0\ ,\ P(B)\neq 0$

پس رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ *(سومی: که شرط «مستقل بودن A و B» است)* هیچ‌گاه نمی‌تواند برقرار باشد. بنابراین **دو پیش‌آمد A و B حتماً وابسته‌اند.** *(سومی: مثال نقض گزینه‌ی ۳ چیست؟ مثلاً اگر $S=\{1,2\}$ و $A=\{1\}$ و $B=\{2\}$ باشد، $A'=\{2\}$ و $B'=\{1\}$ می‌شود. پس:*

$$\underset{\overset{\downarrow}{0}}{P(A'\cap B')}\neq \underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{2}}}{P(A')}\times\underset{\overset{\downarrow}{\frac{1}{2}}}{P(B')}$$

پس عبارت «A' و B' حتماً مستقل‌اند» نادرست است.)

(طراح: مفهومی هم می‌شد گفت. مستقل یعنی این‌که کاری به کار هم نداشته باشند، در صورتی که ناسازگار یعنی یا جای من یا جای تو! یعنی دو پیش‌آمد ناسازگار با هم کار دارند، خیلی هم کار دارند. پس مستقل نیستند؛ یعنی حتماً وابسته‌اند.)

۲۰ ــ گزینه‌ی ۴ از کجا می‌فهمیم دو پیش‌آمد A و B مستقل هستند؟ مطمئن‌ترین راه این است که چک کنیم که آیا رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ بین آن‌ها برقرار است یا نه. اگر برقرار بود، A و B مستقل‌اند. اگر نبود، A و B وابسته‌اند. *(طراح: اصولاً تشخیص مستقل بودن دو پدیده صرفاً از روی مفهوم دشوار است و بعضی از موقع‌ها ما نمی‌توانیم تشخیص درست بدهیم! اگر شما می‌توانید که خیلی کارتان درست است. ولی یک چکی هم با رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ بکنید ضرر ندارد!)* در پرتاب همزمان ۳ سکه، فضای نمونه‌ای دارای $8=2^3$ عضو است.

احتمال «آمدن رو در پرتاب اول» برابر است با:

$$A=\{\text{(ر،ر،ر)},\text{(ر،ر،پ)},\text{(ر،پ،ر)},\text{(ر،پ،پ)}\}\Rightarrow P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

حالا گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ پیش‌آمد «هر سه سکه رو بیاید» را B می‌نامیم:

$$B=\{\text{(ر،ر،ر)}\}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{8}$$

$$A\cap B=\{\text{(ر،ر،ر)}\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$$

می‌بینیم که $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$ است. پس می‌رویم سراغ گزینه‌ی بعدی!

۲ پیش‌آمد «رو آمدن در دو پرتاب اول» را C می‌نامیم:

$$C=\{\text{(ر،ر،ر)},\text{(ر،ر،پ)}\}\Rightarrow P(C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$A\cap C=\{\text{(ر،ر،ر)},\text{(ر،ر،پ)}\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

باز هم می‌بینیم که $P(A\cap C)\neq P(A)P(C)$ است.

۳ پیش‌آمد «پشت آمدن در دو پرتاب اول» را D می‌نامیم:

$$D=\{\text{(پ،پ،ر)},\text{(پ،پ،پ)}\}\Rightarrow P(D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$A\cap D=\{\}\Rightarrow P(A\cap D)=0$$

حتی در این گزینه هم $P(A\cap D)\neq P(A)P(D)$ شد!

۴ پیش‌آمد «پشت آمدن در پرتاب‌های دوم و سوم» را E می‌نامیم:

$$E=\{\text{(ر،پ،پ)},\text{(پ،پ،پ)}\}\Rightarrow P(E)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

$$A\cap E=\{\text{(ر،پ،پ)}\}\Rightarrow P(A\cap E)=\frac{1}{8}$$

بالاخره شد! چون $P(A\cap E)=P(A)P(E)$ شد، دو پدیده‌ی A و E مستقل‌اند. *(طراح: برای کسانی که مفهومش را هم می‌خواهند، باید بگوییم که آمدن پشت دو پرتاب دوم و سوم مستقل از آمدن رو در پرتاب اول است قُب!)*

۲۱ ــ گزینه‌ی ۴ احتمال زنده‌نماندن در یک عمل برابر ۰/۳ است. پس احتمال زنده‌ماندن برابر $1-0/3=0/7$ است. در ضمن پس از یک ماه ۰/۴ احتمال دارد که فرد عمل شده بمیرد. یعنی $1-0/4=0/6$ احتمال دارد که این فرد زنده بماند. می‌خواهیم این فرد هم از اتاق عمل زنده بیرون بیاید و هم پس از یک ماه زنده بماند:

$$P(\text{زنده‌ماندن})=P(\text{زنده‌ماندن در اتاق عمل})\times P(\text{سالم‌ماندن پس از یک ماه})$$

$$=0/7\times0/6=0/42$$

۲۲ ــ گزینه‌ی ۴ دو پیش‌آمد مستقل یعنی دو پیش‌آمد که وقوع یکی تأثیری در شانس وقوع دیگری نداشته باشد. خُب حالا مگر نه این‌که مؤسسه‌ی آتش‌نشانی فقط ۵ نفر استخدام می‌کند، واضح است که مثلاً اگر کوروش در آزمون پذیرفته شود، شانس قبولی بقیه و از جمله برمک کم می‌شود چون یکی از سهمیه‌ها پر شده است. اگر A و B دو پیش‌آمد مستقل باشند می‌دانیم: $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

اما الآن آیا این دو پیش‌آمد مستقل‌اند؟ نه! پس $P(A\cap B)$ برابر ضرب احتمال دو پیش‌آمد نمی‌شود. پس چه می‌شود؟ **معلوم نیست.**

۲۳ ــ گزینه‌ی ۱ می‌دانیم که هر رابطه‌ای که در فصل «مجموعه‌ها» یاد گرفته‌ایم، می‌شود در فصل احتمال به کار برد. مثلاً در مجموعه‌ها داشتیم:

$$n(A\Delta B)=n(A)+n(B)-2n(A\cap B)$$

(سومی: چرا؟) پس در فصل احتمال، دو طرف را تقسیم بر $n(S)$ می‌کنیم و می‌گوییم: $P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

در صورت تست گفته شده است که $P(A\Delta B)=P(A)$ است. داریم:

$$P(A\Delta B)=P(A)\xrightarrow{P(A\Delta B)=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)}$$

$$P(B)-2P(A\cap B)=0\Rightarrow P(B)=2P(A\cap B)$$

چون A و B' مستقل‌اند، می‌شود نتیجه گرفت که A و B هم مستقل‌اند.
(طراح: دلیل ریاضی)

$$\underbrace{P(A\cap B')=P(A)P(B')}_{\text{A و } B' \text{ مستقل‌اند}} \Rightarrow P(A-B)=P(A)(۱-P(B))$$

$$\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

پس A و B هم مستقل‌اند.) داریم:

$$P(B)=۲P(A\cap B)\xrightarrow[P(A\cap B)=P(A)P(B)]{\text{A و B مستقل‌اند}}P(B)=۲P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P(A)=\frac{۱}{۲}}$$

۲۴ ــ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم که $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ و $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$ است. حاصل $P(B)$ را می‌خواهیم. دو رابطه‌ی داده‌شده را باز می‌کنیم:

$$P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}\Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۵}{۶}$$

$$P(A-B)=\frac{۱}{۳}\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۳}$$

$$P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}\Rightarrow \underbrace{\boxed{P(A)}+P(B)\boxed{-P(A\cap B)}}_{\frac{۱}{۳}:\ \text{با توجه به رابطه‌ی بالا}}=\frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۳}=\frac{۵-۲}{۶}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow \mathbf{P(B)=\frac{۱}{۲}}$$

۲۵ ــ گزینه‌ی ۳ ابتدا $P(A)$ را پیدا می‌کنیم:

$$A=\{(۱,۶),(۶,۱),(۲,۵),(۵,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}\Rightarrow P(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

چون در صورت تست گفته شده است که «A و B مستقل هستند» رابطه‌ی $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ بین آن‌ها برقرار است. چون می‌دانیم که $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ است داریم:

$$\frac{P(B-A)}{P(A\cap B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}=\frac{P(B)}{P(A\cap B)}-۱=\frac{\cancel{P(B)}}{P(A)\cancel{P(B)}}-۱$$

$$=\frac{۱}{\frac{۱}{۶}}-۱=۶-۱=۵\Rightarrow \frac{\frac{n(B-A)}{\cancel{n(S)}}}{\frac{n(A\cap B)}{\cancel{n(S)}}}=۵\Rightarrow \mathbf{\frac{n(B-A)}{n(A\cap B)}=۵}$$

۲۶ ــ گزینه‌ی ۳ می‌دانیم که $P(A')=۱-P(A)$ است. پس:

$$P(A')+P(A\cap B)=۱-P(A)+P(A\cap B)\xlongequal{\text{فاکتورگیری از }-۱}$$

$$۱-[\underbrace{P(A)-P(A\cap B)}_{P(A-B)}]=۱-P(A-B)=۱-P(A\cap B')$$

$$=P[(A\cap B')']\xlongequal{\text{دمُرگان}}\mathbf{P(B\cup A')}$$

۲۷ ــ گزینه‌ی ۲ با احتمال غیرهم‌شانس روبه‌رو هستیم. **اگر احتمال وقوع هریک از برآمدها یا همان عضوهای فضای نمونه‌ای برابر هم باشد، احتمال‌مان هم‌شانس است.** ولی وقتی این برابری به هر نوعی به هم می‌خورد، احتمال‌مان غیرهم‌شانس می‌شود. تنها چیزی که در این سؤال‌ها اصل است، این است که **مجموع احتمال‌ها برابر ۱ است!** در این‌جا یعنی:

$$\underbrace{P(a)}_{\frac{۱}{۳}}+\underbrace{P(b)}_{x}+\underbrace{P(c)}_{x}+\underbrace{P(d)}_{x}+\underbrace{P(e)}_{x}=۱\Rightarrow \frac{۱}{۳}+۴x=۱\Rightarrow ۴x=\frac{۲}{۳}$$

$$\Rightarrow x=\frac{۱}{۶}$$

حالا $P(\{a,b,c\})$ را می‌خواهیم:

$$P(\{a,b,c\})=P(a)+P(b)+P(c)=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶}=\mathbf{\frac{۲}{۳}}$$

۲۸ ــ گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای‌مان این‌طوری است:

دو سکه:
- (ر،ر) ــــ ۲
- (ر،پ) ــــ ۴
- (پ،ر) ــــ ۴
- (پ،پ) ــــ ۴

$\xrightarrow{+} n(S)=۱۴$

پس فضای نمونه‌ای دارای **۱۴ عضو** است.

عضوهای این فضای نمونه‌ای غیرهم‌شانس هستند. مثلاً احتمال رخ دادن «سه رو» برابر می‌شود با:

$$P(\text{سه رو})=\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{پرتاب ۲ سکه‌ی اول}}\times\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{پرتاب سکه‌ی سوم}}=\frac{۱}{۸}$$

ولی احتمال رخ دادن «چهار پشت» برابر می‌شود با:

$$P(\text{چهارپشت})=\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{پرتاب ۲ سکه‌ی اول}}\times\underbrace{\frac{۱}{۴}}_{\text{پرتاب سکه‌ی سوم و چهارم}}=\frac{۱}{۱۶}$$

چون احتمال رخ‌دادن هریک از اعضای فضای نمونه‌ای برابر نیست، فضای نمونه‌ای‌مان **غیرهم‌شانس** است.

۲۹ ــ گزینه‌ی ۳ جمع احتمال‌ها باید برابر ۱ باشد:

$$\underbrace{P(\text{بهار})}_{۲x}+\underbrace{P(\text{تابستان})}_{x}+\underbrace{P(\text{پاییز})}_{x}+\underbrace{P(\text{زمستان})}_{\frac{x}{۲}}=۱$$

$$\Rightarrow ۴x+\frac{x}{۲}=۱\xrightarrow{\times ۲}۸x+x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۹}\Rightarrow ۲x=\frac{۴}{۹}\Rightarrow P(\text{بهار})=\frac{۴}{۹}$$

چون باردار شدن دو خرگوش دو پدیده‌ی مستقل از هم هستند *(سومی: البته روی مستقل‌بودن این دو پدیده بین نویسندگان کتاب بحث وجود دارد.)* احتمال این‌که هر دو خرگوش در بهار باردار شوند، برابر ضرب $P(\text{بهار})$ در خودش است. داریم:

$$P(\text{هر دو بهار})=P(\text{بهار})P(\text{بهار})=\frac{۴}{۹}\times\frac{۴}{۹}=\mathbf{\frac{۱۶}{۸۱}}$$

۳۰ ــ گزینه‌ی ۴ در احتمال غیرهم‌شانس رابطه‌ی اصلی این است که «جمع همه‌ی حالت‌ها برابر ۱ شود». داریم:

$$\underbrace{P(۱)}_{x}+\underbrace{P(۲)}_{۳x}+\underbrace{P(۳)}_{۳x}+\underbrace{P(۴)}_{x}+\underbrace{P(۵)}_{۳x}+\underbrace{P(۶)}_{x}=۱$$

چون احتمال آمدن هر عدد اول، ۳ برابر غیر اول است

$$۱۲x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۲}$$

حالا احتمال آمدن عدد زوج را بررسی می‌کنیم. یعنی یا ۲ بیاید یا ۴ بیاید یا ۶:

$$P(\{۲,۴,۶\}) = P(۲)+P(۴)+P(۶) = ۳x+x+x = ۵x = \frac{۵}{۱۲}$$

۳۱ ـ گزینه‌ی ۳ جمله‌ی اول صورت سؤال می‌گوید که:

$$P(۶)=۶x\ ,\ P(۵)=۵x\ ,\ \dots\ ,\ P(۱)=x$$

جمع احتمال‌ها هم که باید برابر ۱ باشد. پس داریم:

$$\underbrace{P(۱)}_{x}+\underbrace{P(۲)}_{۲x}+\underbrace{P(۳)}_{۳x}+\underbrace{P(۴)}_{۴x}+\underbrace{P(۵)}_{۵x}+\underbrace{P(۶)}_{۶x}=۱ \Rightarrow x(\underbrace{۱+۲+\dots+۶}_{\frac{۶(۶+۱)}{۲}})=۱$$

$$۲۱x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲۱}$$

احتمال آن را می‌خواهیم که در دو بار پرتاب این تاس هر دو عدد رو شده مضرب ۳ باشند؛ یعنی هم‌تاس اول مضرب ۳ باشد هم تاس دوم:

$$P(A)=P(\text{تاس اول})\,P(\text{تاس دوم})=(P(۳)+P(۶))(P(۳)+P(۶))$$

$$=(۳x+۶x)(۳x+۶x)=\frac{۹}{۲۱}\times\frac{۹}{۲۱}=\frac{۳}{۷}\times\frac{۳}{۷}=\frac{۹}{۴۹}$$

۳۲ ـ گزینه‌ی ۱ گفته‌های صورت سؤال را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

$$P(\text{بادپا})=۳P(\text{کهر})$$

$$P(\text{کهر})=۲P(\text{کرند})$$

اگر $P(\text{کرند})$ را برابر x در نظر بگیریم، با توجه به این‌که مجموع احتمال‌ها باید برابر ۱ بشود، خواهیم داشت:

$$\underbrace{P(\text{بادپا})}_{۶x}+\underbrace{P(\text{کهر})}_{۲x}+\underbrace{P(\text{کرند})}_{x}=۱ \Rightarrow ۹x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

حالا احتمال پیروزی کهر یا کرند را حساب می‌کنیم:

$$P(\text{کهر})\underset{\text{یا}}{+}P(\text{کرند})=۲x+x=۳x=\frac{۱}{۳}$$

۳۳ ـ گزینه‌ی ۳ چون $S=\{a,b,c,d\}$ است، داریم:

$$P(\{a,b,c\})=\frac{۳}{۵} \Rightarrow P(\{d\})=۱-\frac{۳}{۵}=\frac{۲}{۵} \qquad (۱)$$

حالا کارمان ساده شد! می‌دانیم که: $P(\{b,d\})=P(b)+P(d)$

پس داریم:

$$P(\{b,d\})=\frac{۴}{۷} \Rightarrow P(b)+P(d)=\frac{۴}{۷} \xrightarrow{(۱)} P(b)+\frac{۲}{۵}=\frac{۴}{۷}$$

$$\Rightarrow P(b)=\frac{۴}{۷}-\frac{۲}{۵}=\frac{۲۰-۱۴}{۳۵} \Rightarrow \mathbf{P(b)=\frac{۶}{۳۵}}$$

۳۴ ـ گزینه‌ی ۴ باز هم احتمال غیرهم‌شانس! می‌دانیم که مجموع احتمال‌ها باید برابر ۱ باشد:

$$\underbrace{P(A)}_{x}+\underbrace{P(B)}_{\frac{x}{۲}}+\underbrace{P(C)}_{\frac{x}{۳}}+\underbrace{P(D)}_{\frac{x}{۴}}=۱ \Rightarrow x+\frac{x}{۲}+\frac{x}{۳}+\frac{x}{۴}=۱ \xrightarrow{\times ۱۲}$$

$$۱۲x+۶x+۴x+۳x=۱۲ \Rightarrow ۲۵x=۱۲ \Rightarrow x=\frac{۱۲}{۲۵}$$

حاصل $P(B)$ را می‌خواهیم:

$$P(B)=\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۲}{۲۵} \Rightarrow \mathbf{P(B)=\frac{۶}{۲۵}}$$

۳۵ ـ گزینه‌ی ۴ احتمال «رو آمدن در پرتاب سکه» را P فرض می‌کنیم. احتمال آن‌که سکه هر دو بار رو بیاید برابر است با $P\times P$ داریم:

$$P^{۲}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow P=\frac{۲}{۳}$$

پس احتمال روآمدن در پرتاب این سکه‌ی ناسالم برابر $\frac{۲}{۳}$ است (سومی: *به‌نظر شما یک سکه چرا ناسالم است؟*

۱) سیگاری شده ۲) ایدز گرفته ۳) رشوه گرفته ۴) طراح حالش خوب نیست. هان؟!)

(طراح: سومی [...] ، من مگه این‌که تو رو نبینیم وگرنه [...])

حالا اگر بخواهیم احتمال آن‌که یک‌بار سکه رو و دفعه‌ی دیگر پشت بیاید را حساب کنیم. داریم:

$$P=\underset{\text{دفعه‌ی اول پشت}}{\frac{۱}{۳}}\times\underset{\text{دفعه‌ی دوم رو}}{\frac{۲}{۳}}+\underset{\text{دفعه‌ی اول رو}}{\frac{۲}{۳}}\times\underset{\text{دفعه‌ی دوم پشت}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۴}{۹}$$

زن: می‌تونم باهاتون حرف بزنم؟

[عباس از دیدن چهره‌ی زن، سرش را پایین می‌گیرد.]

عباس: بفرمایید.

زن: من قرصای قلبمو نیاوردم. کم‌کم داره سرم سنگین می‌شه. اگه اجازه بدید من سهم خودمو بدم و برم.

عباس: سهم چی‌رو؟

زن: سهم آزادیمو. بدتون نیاد من جای خواهرتون هستم. شما این کارتون زوره. بی‌منطقی‌یه. باورم نمی‌شه همه‌ی این سروصدا به خاطر مریضی شما باشه. این یه بهانه‌ست مگه نه؟

عباس به هم ریخته است. قصد گفتن جمله‌ای دارد ولی انگار زبانش بند آمده است.]

زن: ببینید. مقاصد شما سیاسیه و مارو ملعبه‌ی این سیاسی بازیتون کردین. والله کی نمی‌دونه شماها به اندازه‌ی کافی غنایم از این جنگ بردین. زمین، یخچال، کولر، تلویزیون، حق تحصیل دانشگاه، بلیط هواپیما و هزار چیز دیگه که نمی‌دونم. پس دیگه چه می‌خواین؟

[جمع در سکوت فردی می‌رود.]

عباس: بفرمایید برید. اونایی که فکر می‌کنن ما یخچال و کولر و دانشگاه گرفتیم و حالا خوشی زده زیر دلمون، بیان برن.

[عباس به سمت در می‌رود و کرکره را بالا می‌کشد.]

عباس: من اصلاً توقعی نداشتم، سرِ زمین با تراکتورم بودم. وقتی هم جنگ تموم شد برگشتم سر همون زمین؛ بدون تراکتور من حتی دفترچه‌ی بیمه نگرفتم. حالا برای من زوره که همچین تهمتی به من بزنن. خواهر با شمام! شما سهمتونو دادید. سهمتون همین نیشایی بود که زدین، دست شما درد نکنه. حالا بفرمایید برید که قلبتون از کار نیفته.

آژانس شیشه‌ای / ابراهیم حاتمی‌کیا

فهرست

بخش ۳
احتمال پیوسته

در یک نگاه

همان‌طور که از نام بخش پیداست، در این بخش محاسبه‌ی احتمال پیوسته را در دستور کار خود داریم!! احتمال پیوسته فقط در کتاب جبر و احتمال آمده است، ولی طراحان کنکور خیلی دوستش دارند!

در بخش ۱ در مورد فضای نمونه‌ای پیوسته صحبت کردیم. در این بخش می‌خواهیم روش محاسبه‌ی احتمال در فضاهای پیوسته را یاد بگیریم. مثلاً اگر به شما بگویند «یک عدد حقیقی به تصادف از بازه‌ی [۰,۷] انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد در بازه‌ی [۱,۳] باشد، چه‌قدر است؟» شما چه می‌گویید؟ در این‌جور مسئله‌ها، برخلاف احتمال در فضای گسسته، با **بی‌شمار** نقطه روبه‌رو هستیم. برای مثال طول یک خط، مساحت یک دایره، حجم یک مخروط و ... . چون نمی‌توانیم بی‌شمار نقطه را بشماریم ـ ما که نمی‌توانیم! شما چه‌طور؟! ـ باید به جای رابطه‌ی $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ از رابطه‌ی دیگری برای به‌دست‌آوردن احتمال استفاده کنیم.

برای راحتی کار، مسئله‌های احتمال پیوسته را به ۳ دسته تقسیم می‌کنیم:

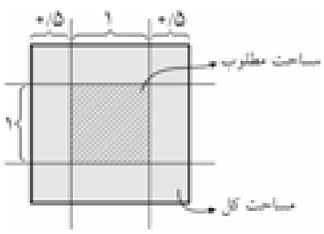
مثالی که در چند خط بالاتر خواندید، یک مسئله‌ی یک بعدی است.

یک بعدی: در این‌جور مسئله‌ها، با بازه‌ای از اعداد سروکار داریم. برای محاسبه‌ی احتمال پیش‌آمد مطلوب، طول پیش‌آمد مطلوب را تقسیم بر طول فضای نمونه‌ای می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{l_A \longrightarrow \text{طول پیش‌آمد مطلوب}}{l_S \longrightarrow \text{طول فضای نمونه‌ای}}$$

دو بعدی: مثلاً اگر بگویند «نقطه‌ای درون یک مربع به ضلع ۲ است چه‌قدر احتمال دارد که این نقطه از ضلع‌ها بیش از ۰/۵ واحد فاصله داشته باشد؟» مسئله را این‌طوری حل می‌کنیم:

شکل می‌کشیم! مساحت مطلوب (هاشورخورده) و مساحت کل فضای نمونه‌ای (ناحیه‌ی خاکستری) را در آن نشان می‌دهیم.



در آخر یک تقسیم ساده داریم: $P=\frac{۱\times۱}{۲\times۲}=\frac{۱}{۴}$

پس در مسئله‌های دو بعدی داریم:

$$P(A)=\frac{a_A \longrightarrow \text{مساحت پیش‌آمد مطلوب}}{a_S \longrightarrow \text{مساحت فضای نمونه‌ای}}$$

سه بعدی: هر وقت با **حجم** سروکار داشتیم، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

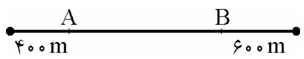
$$P(A)=\frac{V_A \longrightarrow \text{حجم پیش‌آمد مطلوب}}{V_S \longrightarrow \text{حجم فضای نمونه‌ای}}$$

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ـ یک عدد حقیقی به‌تصادف از بازه‌ی [۳,۶-] انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که قدر مطلق این عدد بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۴}{۹}$

۲ ـ هیوا در نقطه‌ای از ساحل ۲۵۰۰ متری آنتالیا در حال آفتاب‌گرفتن است. دو دکه‌ی بستنی‌فروشی A و B مطابق شکل زیر در این ساحل قرار دارند. اگر هیوا تصمیم به خرید بستنی از بستنی‌فروشی نزدیک‌تر را داشته باشد، به چه احتمالی از بستنی‌فروشی A خرید می‌کند؟

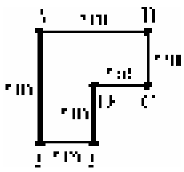


۱) ۰/۴۳ ۲) ۰/۴۶ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۵۳

۳ ـ زمان حرکت مترو از یک ایستگاه خاص در ساعات بین ۷ تا ۹ صبح هر دوازده دقیقه یک بار است. (ساعت‌های هفت، هفت و دوازده دقیقه، هفت و بیست و چهار دقیقه و ...) فردی بین ساعت هفت و چهل دقیقه و هشت ونیم به این ایستگاه خواهد رسید. احتمال آن‌که بیش از ۵ دقیقه معطل بماند، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۷}{۱۲}$ ۳) $\frac{۳}{۵}$ ۴) $\frac{۵۸}{۱۰۰}$

۴ ـ مورچه‌ای روی چوبی به شکل روبه‌رو در جهت عقربه‌های ساعت در حال حرکت است و در هر یک از محل‌های A، B، C، D، E و F توقف می‌کند. احتمال آن‌که فاصله‌ی مورچه از محل توقف بعدی کم‌تر از یک متر باشد، چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۵ ـ برای یک لحظه به‌طور تصادفی به عقربه‌ی ثانیه‌شمار یک ساعت نگاه می‌کنیم. احتمال آن‌که زاویه‌ی ثانیه‌شمار با ساعت ۱۲ بیش‌تر از ۳۰ درجه باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$ ۳) $\frac{۱۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۲۳}{۲۴}$

۶ ـ می‌دانیم یک بازی بسکتبال در مسابقات NBA از چهار بخش (کوارتر) ۱۲ دقیقه‌ای تشکیل شده است. احتمال آن‌که در یک لحظه که بازی متوقف شده است، تا انتهای کوارتر کم‌تر از ۳ دقیقه زمان باقی مانده باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۷ ـ دو تکه چوب به طول های ۲ و ۸ متر داریم. تکه‌ی بزرگ‌تر را از نقطه‌ای به‌تصادف می‌بُریم. احتمال آن‌که با سه تکه چوب به‌وجودآمده، بتوان مثلث تشکیل داد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸ ـ تجربه‌ی قبلی نشان می‌دهد که هر کتاب جدید از انتشارات فار می‌تواند بین ۵ تا ۱۶ درصد بازار کتاب کنکور را به خود اختصاص دهد. احتمال آن‌که کتاب گسسته‌ی انتشارات فار بیش از ۸/۵ درصد بازار را به خود اختصاص دهد، کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۱۱}$ ۲) $\frac{۷}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱۳}{۲۲}$ ۴) $\frac{۱۵}{۲۲}$

۹ ـ در یک مثلث قائم‌الزاویه احتمال آن‌که یکی از زاویه‌های حاده کوچک‌تر از ۱۰ درجه باشد چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۱۸}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۰ ـ زمان تصادفی برحسب ثانیه که یک حیوان پس از اصابت تیر حاوی داروی بی‌هوشی بی‌هوش شود، بین ۷۵ تا ۳۰۰ ثانیه است. احتمال آن‌که بی‌هوشی حیوان بیش از ۳ دقیقه پس از اصابت تیر اتفاق بیفتد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۲۳}{۴۵}$ ۲) $\frac{۲۴}{۴۵}$ ۳) $\frac{۲۶}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲۷}{۴۵}$

۱۱ ـ خط $x+y=۴$ را رسم می‌کنیم تا با محورهای مختصات تشکیل یک مثلث دهد. نقطه‌ای روی محیط این مثلث به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی طول و عرض این نقطه بزرگ‌تر از ۱ است؟

۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۲}+۲}$ ۳) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۱}$ ۴) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۲}$

۱۲ ـ اگر $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۲\pi}{۳}$ باشد، به چه احتمالی $\sin x<\cos x$ است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

۱۳ ـ مجموع دو عدد حقیقی مثبت برابر ۷ است. احتمال آن‌که یکی از این اعداد بزرگ‌تر از ۵ باشد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۴}{۷}$

۱۴ ـ مجموع دو عدد حقیقی مثبت کوچک‌تر مساوی ۵ است. احتمال آن‌که هر دو عدد بزرگ‌تر از ۱ باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۵}$ ۲) $\frac{۳}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۲۵}$ ۴) $\frac{۹}{۲۵}$

۱۵ ـ اگر $a\in[-۱,۴]$ و $b\in[۰,۳]$ باشد، احتمال آن‌که $a+b>۲$ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۶۵ ۳) ۰/۷ ۴) ۰/۷۵

۱۶ ـ نقطه‌ای به‌تصادف داخل مربعی به ضلع ۵ در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که فاصله‌ی این نقطه از هر کدام از اضلاع مثلث بیش از یک باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۲۲}{۲۵}$ ۲) $\frac{۱۶}{۲۵}$ ۳) $\frac{۹}{۲۵}$ ۴) $\frac{۴}{۲۵}$

۱۷ ـ زمانی‌که یک باتری دوراسل می‌تواند نوعی لامپ را روشن نگه دارد زمانی تصادفی بین صفر تا ۳ ساعت است. یک باتری دوراسل برای روشن‌کردن لامپ استفاده می‌کنیم و به محض این‌که لامپ خاموش شد، آن را با باتری جدیدی عوض می‌کنیم. احتمال آن‌که مجموع زمان روشنایی لامپ از ۴ ساعت بیش‌تر باشد کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۲}{۹}$

۱۸ ـ نقطه‌ای به‌تصادف داخل مربعی به ضلع یک انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که فاصله‌ی این نقطه از هر کدام از رئوس بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{۴}$ ۲) $\frac{\pi}{۸}$ ۳) $۱-\frac{\pi}{۴}$ ۴) $۱-\frac{\pi}{۸}$

۱۹ ـ مجموع دو عدد حقیقی مثبت بین ۲ و ۴ است. احتمال آن‌که هر دو عدد بزرگ‌تر از ۱ باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) ۱

۲۰ ـ نقطه‌ای به‌تصادف داخل یک مربع انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که به رأس A نزدیک‌تر باشد تا به محل تلاقی دو قطر مربع کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۲۱ ـ نقطه‌ای به‌تصادف داخل یک دایره در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که فاصله‌ی این نقطه تا مرکز بیش از دو برابر فاصله‌ی آن تا محیط دایره باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۵}{۹}$

۲۲ ـ در آزمایش انتخاب دو عدد حقیقی از بازه‌ی $[۰,۲]$ پیش‌آمد A آن است که مجموع دو عدد بزرگ‌تر از ۱ و پیش‌آمد B آن است که هر دو عدد کوچک‌تر از ۱ باشند. حاصل $P(A-B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۵}{۸}$ ۴) $\frac{۷}{۸}$

۲۳ ـ در آزمایش انتخاب دو عدد حقیقی از بازه‌ی $[۰,۱]$ پیش‌آمد این‌که مجموع دو عدد بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ باشد، چه مساحتی روی $\mathbb{R}^۲$ اشغال می‌کند؟

۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۵}{۱۸}$ ۳) $\frac{۵}{۳۶}$ ۴) $\frac{۵}{۷۲}$

۲۴ ـ در یک ساختمان درجه‌ی حرارت اتاق A بین ۱۵ تا ۲۵ درجه‌ی سانتی‌گراد و درجه‌ی حرارت اتاق B بین ۲۰ تا ۳۰ درجه‌ی سانتی‌گراد تغییر می‌کند. احتمال آن‌که بین درجه‌ی حرارت دو اتاق دقیقاً ۵ درجه فاصله باشد، چه‌قدر است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۵}$ ۳) $\frac{۲}{۵}$ ۴) $\frac{۴}{۲۵}$

۲۵ ــ یک عدد حقیقی به‌تصادف از بازه‌ی $[0,9]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این عدد صحیح باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{81}$ ۴) صفر

۲۶ ــ سکه‌ای به قطر ۱۲ سانتی‌متر را بر روی مربعی به ضلع ۶۰ سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. اگر فرض کنیم مرکز سکه داخل مربع قرار گرفته است، به چه احتمالی کل سکه نیز داخل مربع قرار دارد؟

۱) $\frac{5}{16}$ ۲) $\frac{16}{25}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{9}{25}$

۲۷ ــ محدثه و نجمه قرار می‌گذارند بین ساعت ۳ تا ۳/۵ در حرم شاه عبدالعظیم حاضر شوند. احتمال آن‌که هیچ‌کدام بیش‌تر از ۵ دقیقه منتظر دیگری نمانند، کدام است؟

۱) $\frac{9}{36}$ ۲) $\frac{10}{36}$ ۳) $\frac{11}{36}$ ۴) $\frac{12}{36}$

۲۸ ــ نقطه‌ای به‌تصادف داخل کره‌ای بر مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۲ در نظر می‌گیریم احتمال آن‌که این نقطه روی صفحه به مختصات $x+y+z=1$ قرار داشته باشد، کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{39}$

۲۹ ــ دو عدد حقیقی به‌تصادف در بازه‌ی $[0,4]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که نسبت دو عدد بزرگ‌تر از ۳ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{3}{16}$ ۴) $\frac{3}{32}$

۳۰ ــ نقاط a و b روی محور اعداد حقیقی به‌طور تصادفی انتخاب شده‌اند به‌طوری‌که $-2 \le a \le 0$ و $0 \le b \le 5$ است. احتمال آن‌که فاصله‌ی این دو نقطه بیش از ۴ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳۱ ــ در عبارت $3m+n$ اگر $0 \le m \le 2$ و $0 \le n \le 4$ باشد، به چه احتمالی عبارت بزرگ‌تر از ۴ خواهد بود؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۲ ــ نقطه‌ای به‌تصادف داخل یک کره انتخاب می‌کنیم احتمال آن‌که فاصله‌ی این نقطه به مرکز کره نزدیک‌تر باشد تا به سطح داخلی آن کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{4}{27}$ ۴) $\frac{8}{27}$

۳۳ ــ در معادله‌ی $ax=b$ ضریب a به‌طور تصادفی عددی از بازه‌ی $[1,2]$ و b عددی از بازه‌ی $[0,5]$ است. احتمال آن‌که ریشه‌ی معادله بزرگ‌تر از ۲ باشد، کدام است؟

۱) ۰/۳ ۲) ۰/۴ ۳) ۰/۵ ۴) ۰/۶

۳۴ ــ نقطه‌ای روی مثلث به‌وجودآمده از محل برخورد صفحه‌ی $x+y+z=1$ و محورهای مختصات را در نظر می‌گیریم. احتمال آن‌که هر سه مؤلفه‌ی x ، y و z این نقطه کوچک‌تر از $\frac{1}{2}$ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{6}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۳۵ ــ دو مکعب هم‌مرکز به اضلاع ۲ و ۵ در نظر بگیرید. نقطه‌ای به‌تصادف داخل مکعب بزرگ‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این نقطه داخل مکعب کوچک‌تر نباشد کدام است؟

۱) ۰/۷۶۵ ۲) ۰/۸۴۰ ۳) ۰/۹۳۶ ۴) ۰/۹۶۸

۳۶ ــ در بازه‌ی $[0,3]$ دو نقطه به‌تصادف طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به ۳ پاره‌خط تقسیم کنند. احتمال آن‌که با این ۳ پاره‌خط بتوان یک مثلث تشکیل داد، کدام است؟

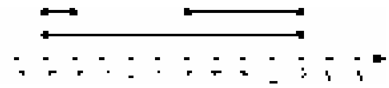
۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{3}{4}$

۳۷ ــ یک محور مختصات در نظر بگیرید. نقطه‌ی A به صورت تصادفی از بازه‌ی $[0,2]$ روی محور x ها و نقطه‌ی B به صورت تصادفی از بازه‌ی $[0,2]$ روی محور y ها انتخاب می‌شود. به چه احتمالی طول AB بیش‌تر از ۲ است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $1-\frac{\pi}{4}$ ۴) $1-\frac{\pi}{6}$

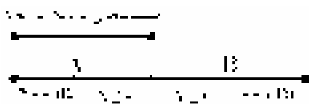
پاسخ پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱ ـ گزینه‌ی ۱ چون عدد انتخاب‌شده از بازه‌ی [۳,۶−] عددی حقیقی است. بنابراین ما با یک مسئله‌ی احتمال پیوسته سروکار داریم. فضای نمونه‌ای طول بازه‌ی [۳,۶−] و پیش‌آمد موردنظر طول قسمت‌هایی از این بازه است که قدرمطلق آن بزرگ‌تر از ۲ است:



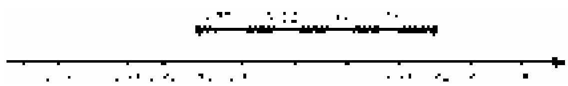
$$\Rightarrow P=\frac{۱+۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

۲ ـ گزینه‌ی ۲ هیوا ممکن است در هر نقطه‌ای از ساحل دراز کشیده باشد. بنابراین فضای نمونه‌ای طول کل ساحل است. اما اگر هیوا در نقطه‌ای از ساحل باشد که به بستنی‌فروشی A نزدیک‌تر باشد، طبیعی است از A بستنی بخرد بنابراین پیش‌آمد موردنظر، طول قسمت‌هایی است که به A نزدیک‌تر است.



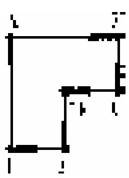
$$\Rightarrow P=\frac{۴۰۰+۷۵۰}{۲۵۰۰}=\frac{۱۱۵۰}{۲۵۰۰}=۰/۴۶$$

۳ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای طول مدت زمانی است که فرد به ایستگاه خواهد رسید؛ یعنی بین هفت و چهل دقیقه و هشت و نیم. پیش‌آمد موردنظر طول مدتی از این زمان است که فرد بیش از پنج دقیقه معطل شده است. این قسمت‌ها را در شکل زیر هاشور زده‌ایم:



در نتیجه: $P=\frac{۳+۷+۷+۷+۶}{۵۰}=\frac{۳۰}{۵۰}=\frac{۳}{۵}$

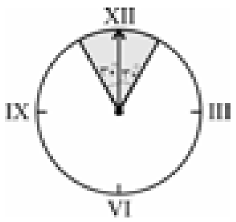
۴ ـ گزینه‌ی ۱ خُب، برویم سراغ این مورچه‌ی سرگردان. مورچه روی هر قسمتی از این چوب می‌تواند باشد، بنابراین فضای نمونه‌ای می‌شود کل طول چوب. اما دوست داریم مورچه کجا باشد؟ *(سومی: توی سوراخش؟)* *(طراح: نه سومی جان باهوش! آن موش است که توی سوراخ است. مورچه می‌رود توی لانه.)* جاهایی که فاصله‌اش از محل توقف بعدی کم‌تر از یک متر است. این قسمت‌ها را در شکل با هاشور نشان می‌دهیم:



$$\Rightarrow P=\frac{۶}{۴+۴+۲+۲+۲+۲}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

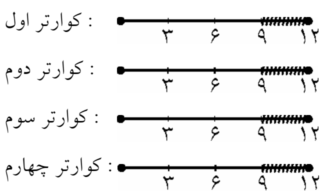
(سومی: من یک سؤال فلسفی برایم پیش‌آمده؛ این مورچه چرا روی این چوب راه می‌رود؟)

۵ ـ گزینه‌ی ۲ با توجه به شکل مشخص است اگر عقربه‌ی ثانیه‌شمار در قسمت سفید رنگ باشد زاویه‌ی آن با ساعت ۱۲ بیش‌تر از ۳۰° است.



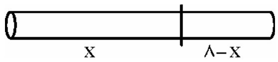
(سومی: عقربه‌ی ثانیه‌شمار چون دور مرکز به طور کامل می‌چرخد ۳۶۰° را طی می‌کند. که از این ۳۶۰° همان‌طور که از شکل نیز پیداست، در ۶۰° آن، زاویه‌ای کوچک‌تر مساوی ۳۰° با ساعت ۱۲ را دارد.) احتمال موردنظر را محاسبه می‌کنیم: $P=\frac{۳۶۰-۶۰}{۳۶۰}=\frac{۵}{۶}$

۶ ـ گزینه‌ی ۲ فکر می‌کنم با شکل زیر پاسخ سؤال واضح باشد. قسمت‌های هاشورخورده در هر کوارتر قسمت‌هایی است که احتمال وقوع آن خواسته شده است.



$$P=\frac{۳+۳+۳+۳}{۱۲+۱۲+۱۲+۱۲}=\frac{۱}{۴}$$

۷ ـ گزینه‌ی ۲ اگر چوب ۸ متری را از نقطه‌ای ببریم، چوب به دو بخش تقسیم می‌شود. *(سومی: تو رو قرآن؟)* اگر فرض کنیم طول قسمت چپ x باشد، طول قسمت راست $۸-x$ می‌شود.



خُب، حالا سؤال این است که این x چه‌قدر می‌تواند تغییر کند؟ *(سومی: منظورش این است که طولش حداقل چند است و حداکثر چند.)* واضح است که $۰<x<۸$ است، یعنی اگر همان اول‌ها طرف سر سمت چپ چوب *(سومی: بالاتر از پمپ بنزین، نبش کوچه‌ی شمشاد! چه آدرسی می‌ده!)* آن را بِبُریم، x عددی نزدیک به صفر خواهد شد و برعکس اگر نزدیک به سر سمت راست چوب، آن را بِبُریم، x تقریباً برابر ۸ خواهد شد.

اما اگر طول این x چند باشد، مثلث تشکیل می‌شود؟ می‌دانیم **در هر مثلث مجموع دو ضلع مثلث بزرگ‌تر از ضلع سوم است**. در حال حاضر ما سه چوب به طول‌های ۲، x و $۸-x$ داریم. سه نامساوی را تشکیل می‌دهیم:

$x+(۸-x)>۲ \Rightarrow ۸>۲$ بدیهی است.

$$\left.\begin{array}{l} x+۲>۸-x \Rightarrow ۲x>۶ \Rightarrow x>۳ \\ (۸-x)+۲>x \Rightarrow ۲x<۱۰ \Rightarrow x<۵ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳<x<۵$$

بنابراین فضای نمونه‌ای طول چوب ۸ متری است و پیش‌آمد موردنظر بخشی از چوب است که اگر در آن ناحیه برش زده شود، سه قطعه‌ی به‌وجودآمده تشکیل یک مثلث می‌دهند. داریم: $P=\frac{۵-۳}{۸}=\frac{۱}{۴}$

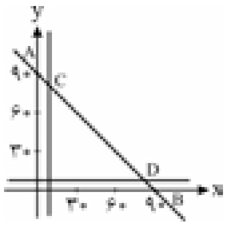
۸ ـ **گزینه‌ی ۴** *(سومی: چی شد؟ چی شد؟ قرار نبود تبلیغی صورت بگیره ها!!)* خُب این هم یک مسئله‌ی احتمال پیوسته است. انگار که عددی حقیقی از بازه‌ی [۵,۱۶] انتخاب کنیم به شرط آن‌که بزرگ‌تر از ۸/۵ باشد:

$\Rightarrow P=\frac{۷/۵}{۱۱}=\frac{۱۵}{۲۲}$

۹ ـ **گزینه‌ی ۴** **راه اول:** زاویه‌های حاده را A و $۹۰-A$ می‌نامیم. زاویه‌ی A می‌تواند از صفر تا ۹۰ تغییر کند اما اگر بخواهیم لااقل یکی از زاویه‌های حاده کم‌تر از ۱۰° باشد یا $۰<A<۱۰$ و یا $۸۰<A<۹۰$ *(سومی: زیرا در این صورت اون یکی زاویه‌ی حاده کم‌تر از ۱۰° می‌شود.)* پس:

$$P=\frac{۱۰+۱۰}{۹۰}=\frac{۲}{۹}$$

راه دوم: زاویه‌های حاده را x و y می‌نامیم می‌دانیم $x+y=۹۰$ و می‌خواهیم $x<۱۰$ یا $y<۱۰$ باشد. فضای نمونه‌ای طول پاره‌خط AB و پیش‌آمد موردنظر این سؤال مجموع طول‌های پاره‌خط‌های AC و BD است.

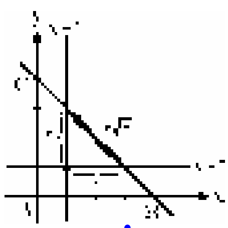


$$\left.\begin{array}{l} AB=۹۰\sqrt{۲} \\ BD=AC=۱۰\sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\frac{۱۰\sqrt{۲}+۱۰\sqrt{۲}}{۹۰\sqrt{۲}}=\frac{۲}{۹}$$

(سومی: امیدواریم که گیج نشده باشید!)

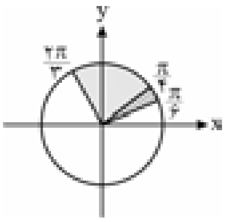
۱۰ ـ **گزینه‌ی ۲** این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی جبر و احتمال است. باز هم یک سؤال احتمال پیوسته‌ی خطی است. انگار که عددی حقیقی بین ۷۵ تا ۳۰۰ به‌تصادف انتخاب شده است و ما می‌خواهیم این عدد بزرگ‌تر از ۱۸۰ باشد. *(سومی: این‌که سه دقیقه می‌شود ۱۸۰ ثانیه که توضیح لازم ندارد، دارد؟)* داریم: $P=\frac{۳۰۰-۱۸۰}{۳۰۰-۷۵}=\frac{۱۲۰}{۲۲۵}=\frac{۲۴}{۴۵}$

۱۱ ـ **گزینه‌ی ۴** بگذارید بکشیم، ببینیم شکلش چه‌جوری می‌شود:



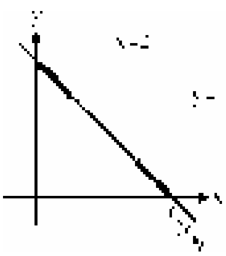
برای آن‌که طول و عرض نقطه بزرگ‌تر از ۱ باشد خط‌های $x=۱$ و $y=۱$ را رسم می‌کنیم و قسمت سمت راست خط $x=۱$ و بالای خط $y=۱$ را در نظر می‌گیریم. *(سومی: در شکل هاشورخورده است.)* فضای نمونه‌ای، محیط مثلث ABC و پیش‌آمد موردنظر طول قسمت هاشورخورده است: $P=\frac{۲\sqrt{۲}}{۴+۴+۴\sqrt{۲}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۸+۴\sqrt{۲}}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}+۲}$

۱۲ ـ **گزینه‌ی ۱** در ربع دوم سینوس مثبت و کسینوس منفی است. در ربع اول نیز اگر $۰<x<\frac{\pi}{۴}$ باشد، $\cos x>\sin x$ است. اما اگر $\frac{\pi}{۴}<x<\frac{\pi}{۲}$ باشد، $\sin x>\cos x$ است (چرا؟!) فضای نمونه‌ای در این سؤال همه‌ی زاویه‌ی بین $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{۲\pi}{۳}$ *(سومی: قسمت فاکستری)* و پیش‌آمد موردنظر، زوایایی از این فضای نمونه‌ای است که در آن $\sin x<\cos x$ باشد؛ یعنی $\frac{\pi}{۶}<x<\frac{\pi}{۴}$ *(سومی: قسمت هاشورخورده)* بنابراین داریم:



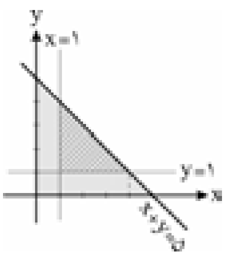
$$P=\frac{\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}}{\frac{۲\pi}{۳}-\frac{\pi}{۶}}=\frac{\frac{\pi}{۱۲}}{\frac{\pi}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

۱۳ ـ **گزینه‌ی ۴** دو عدد را x و y می‌نامیم می‌دانیم $y>۰$ و $x>۰$ و $x+y=۷$ است. اگر بخواهیم تعبیر هندسی سؤال را داشته باشیم، فضای نمونه‌ای همه‌ی نقاط روی خط $x+y=۷$ است که در ربع اول واقع می‌شود طول پاره‌خط در ربع اول. اما برویم سراغ پیش‌آمد موردنظر. می‌خواهیم یکی از اعداد بزرگ‌تر از ۵ باشد؛ یعنی $x>۵$ یا $y>۵$ باشد. خُب، این دو خط را نیز رسم می‌کنیم و قسمت راست و بالای آن‌ها را در نظر می‌گیریم *(سومی: قسمت‌های هاشورزده شده‌ی پاره‌خط)* داریم: $P=\frac{۲\sqrt{۲}+۲\sqrt{۲}}{۷\sqrt{۲}}=\frac{۴}{۷}$



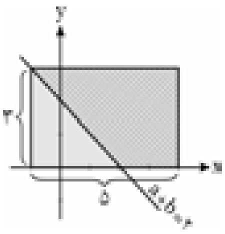
(طراح: راه دیگری هم دارد این سؤال مثل روشی که در پاسخ سؤال ۹ همین بخش توضیح دادیم. یکی از اعداد را x و دیگری را $۷-x$ در نظر بگیریم و... بقیه‌ش با خودتان!)

۱۴ ـ **گزینه‌ی ۴** تفاوت این سؤال با سؤال قبل در این‌جاست که در سؤال قبلی $x+y=۷$ بود، اما در این سؤال $x+y\leq۵$ است. *(سومی: یعنی در سؤال قبل فضای نمونه‌ای نقاط روی خط بود، یعنی جنس فضای نمونه‌ای از جنس طول بود اما در این سؤال، فضای نمونه‌ای نقاط زیر خط $x+y=۵$ در ربع اول است و در واقع فضای نمونه‌ای از جنس سطح است.)* فضای نمونه‌ای و پیش‌آمد را پیدا می‌کنیم و احتمال خواسته شده را محاسبه می‌کنیم. فضای نمونه‌ای مساحت مثلث به‌وجودآمده از



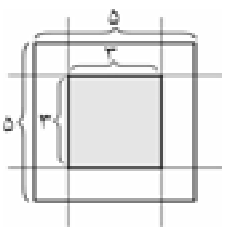
تقاطع خط $x+y=۵$ و محورهای مختصات است و پیش‌آمد مورد نظر ناحیه‌ای از این فضا که بالای خط $y=۱$ و سمت راست خط $x=۱$ قرار دارد *(سومی: قسمت هاشورخورده)*. داریم:

$$P=\frac{\frac{۳\times۳}{۲}}{\frac{۵\times۵}{۲}}=\frac{۹}{۲۵}$$



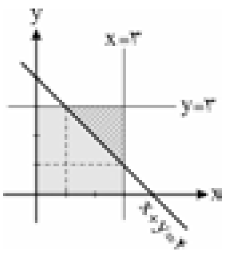
۱۵ ـ گزینه‌ی ۳ a را روی محور افقی و b را روی محور عمودی نشان می‌دهیم. فضای نمونه‌ای سطح مستطیلی به طول ۵ و عرض ۳ است. پیش‌آمد مورد نظر قسمتی از این فضای نمونه‌ای است که بالای خط $a+b=۲$ باشد. *(سومی: قسمت هاشورخورده)* داریم:

$$P=\frac{۱۵-\frac{۳\times۳}{۲}}{۱۵}=\frac{۲۱}{۳۰}=\frac{۷}{۱۰}$$



۱۶ ـ گزینه‌ی ۳ خطوطی موازی هریک از اضلاع مربع و داخل آن رسم می‌کنیم. پیش‌آمد موردنظر مربعی به ضلع ۳ داخل مربع بزرگ‌تر است:

$$P=\frac{۳\times۳}{۵\times۵}=\frac{۹}{۲۵}$$



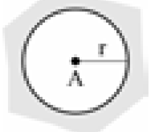
۱۷ ـ گزینه‌ی ۴ مدت زمانی که باتری اول کار می‌کند را x مدت و زمانی که باتری دوم کار می‌کند را y فرض می‌کنیم. می‌دانیم $۰\le x\le ۳$ و $۰\le y\le ۳$ است. اگر بخواهیم لامپ بیش از ۴ ساعت کار کند، باید داشته باشیم: $x+y>۴$

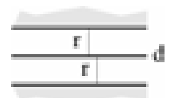
فضای نمونه‌ای مساحت مربع به ضلع ۳ و پیش‌آمد موردنظر مساحت مثلث هاشورخورده است. داریم:

$$P=\frac{\frac{۲\times۲}{۲}}{۹}=\frac{۲}{۹}$$

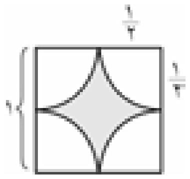
۱۸ ـ گزینه‌ی ۳ اگر بخواهیم فاصله‌ی نقطه از هرکدام از رئوس بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد، نقطه باید خارج از دایره‌هایی به مراکز رئوس و شعاع $\frac{۱}{۲}$ باشد.

(سومی: من یک چیزی را بدنیست این‌جا توضیح بدهم. اگر ما بخواهیم قسمت‌هایی از صفحه را مشخص کنیم تا از نقطه‌ای مثل A فاصله‌ای بیش‌تر از r داشته باشد، باید یک دایره به مرکز A و شعاع r رسم کنیم و خارج از آن را در نظر بگیریم. اما اگر قسمت‌هایی از صفحه را بخواهیم که از خطی مثل d فاصله‌ی بیش از r داشته باشد باید دو خط به موازات d و به فاصله‌ی r از d رسم کنیم و بیرون آن‌ها را در نظر بگیریم.



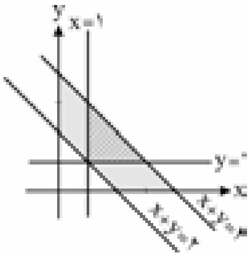


در شکل‌هایی که می‌بینید، قسمت خاکستری همان قسمت‌های مطلوب است.)



همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود پیش‌آمد موردنظر ما قسمت خاکستری است. برای به‌دست آوردن مساحت قسمت موردنظر، کافی است مساحت چهار ربع دایره را که طبیعتاً می‌شود یک دایره، از مساحت مربع کم کنیم. داریم:

$$P=\frac{۱-\pi(\frac{۱}{۲})^۲}{۱}=۱-\frac{\pi}{۴}$$

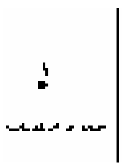


۱۹ ـ گزینه‌ی ۱ اعداد را x و y می‌نامیم. فضای نمونه‌ای قسمت‌هایی از ربع اول است که در آن $۲\le x+y\le ۴$ است؛ یعنی بین دو خط $x+y=۲$ و $x+y=۴$ باشد. پیش‌آمد موردنظر قسمت‌هایی از این فضای نمونه‌ای است که در آن x و y هر دو بزرگ‌تر از یک باشند؛ یعنی بالای خط $y=۱$ و سمت راست خط $x=۱$ داریم:

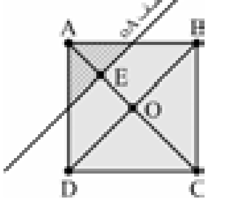
$$P=\frac{\frac{۲\times۲}{۲}}{\frac{۴\times۴}{۲}-\frac{۲\times۲}{۲}}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

(سومی: برای به‌دست‌آوردن مساحت فضای نمونه‌ای، مساحت مثلثی که از محل برخورد خط $x+y=۲$ و محورهای مختصات به وجود آمده را از مساحت مثلثی که از محل برخورد خط $x+y=۴$ و محورها به وجود آمده کم کرده‌ایم.)

۲۰ ـ گزینه‌ی ۲ فکر کنم ابتدا یک توضیح کلی بدهیم، بد نیست! فکر کنید دو نقطه‌ی A و B در یک صفحه قرار دارند، به‌نظرتان مکان هندسی نقاطی که فاصله‌شان از این دو نقطه برابر است، کجاست؟ *(سومی: منظور پاسخ‌دهنده اینه که کجای این صفحه، فاصله‌شون از A و B برابره؟)* بله، ما در هندسه یک چیزی *(سومی: چیز نیست، خط است!)* به نام عمودمنصّف داریم، که نقاطی که روی عمودمنصف دو نقطه باشند فاصله‌ای برابر از دو نقطه دارند. بدیهی است که مثلاً در شکل روبه‌رو نقاط سمت راست عمودمنصف به B و نقاط سمت چپ آن به A نزدیک‌ترند.



حالا بپردازیم به حل سؤال. مرکز مربع را O می‌نامیم و عمودمنصف OA را رسم می‌کنیم. طبیعی است باید قسمتی از مربع را در نظر بگیریم که سمت چپ عمودمنصف OA است. برای به‌دست‌آوردن نسبت قسمت هاشورخورده به مساحت کل مربع یک کمی باید از هندسه و آقای تالس و بقیه‌ی دوستان کمک بگیریم. می‌دانیم $\frac{AE}{AO}=\frac{۱}{۲}$ *(سومی: عمودمنصف است دیگر!)* می‌دانیم نسبت مساحت‌ها برابر است با نسبت مربعات ارتفاع‌ها، بنابراین:

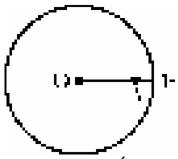


$$\frac{S_{\text{مثلث هاشورخورده}}}{S_{ABD}}=(\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}$$

از طرفی مساحت مثلث ABD نصف مساحت مربع است. بنابراین:

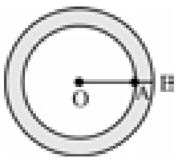
$$\frac{S_{\text{مثلث هاشورخورده}}}{S_{\text{مربع}}}=\frac{۱}{۸}$$

۲۱ ـ گزینه‌ی ۴ فضای نمونه‌ای که مساحت دایره است، این از این!



اما برویم سراغ پیش‌آمد موردنظر: *(سومی: پیش‌آمد موردنظر در این‌جا می‌گوید: به سراغ من اگر می‌آیید، نرم و آهسته بیایید، مبادا که ترک بردارد، چینی نازک تنهایی من. با تشکر از سهراب سپهری و رفقا) (طراح: سومی کسی قبلاً به‌تو گفته خیلی لوسی یا من الان بگم؟) (پاسخ‌دهنده: چه‌قدر پرند می‌گین شما دوتا! بزارید جوابم رو بدم) (سومی: بده، بده!)*

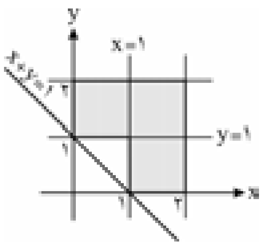
اگر بخواهیم فاصله‌ی نقطه تا مرکز بیش از دو برابر فاصله‌ی آن تا محیط دایره باشد یعنی این‌که مثلاً اگر A را روی شعاع دایره فرض کنیم $OA > 2AB$ باشد. اگر $OA = 2AB$ باشد، نقاطی که روی دایره به مرکز O و شعاع OA قرار دارند فاصله‌شان تا مرکز دقیقاً دو برابر فاصله‌شان تا محیط است.



بنابراین نقاط بین دو دایره فاصله‌شان از مرکز بیش‌تر از دو برابر فاصله‌شان تا محیط است. برای به‌دست‌آوردن مساحت قسمت موردنظر، مساحت‌های دو دایره را از هم کم می‌کنیم. داریم:

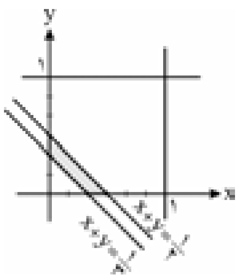
$$P = \frac{\pi r^2 - \pi(\frac{2}{3}r)^2}{\pi r^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

۲۲ ـ گزینه‌ی ۲ پیش‌آمد A فضای بالای خط $x+y=1$ و پیش‌آمد B فضای مشترک زیر خط $y=1$ و سمت چپ خط $x=1$ در همین فضا است. بنابراین $A-B$ می‌شود مساحت قسمت خاکستری. داریم:



$$P(A-B) = \frac{3}{4}$$

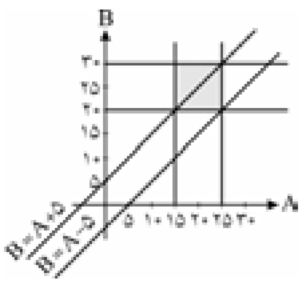
۲۳ ـ گزینه‌ی ۴ اگر اعداد را x و y بنامیم، مساحت قسمتی را می‌خواهیم که در آن $\frac{1}{3} \le x+y \le \frac{1}{2}$ باشد. خط‌های $x+y=\frac{1}{3}$ و $x+y=\frac{1}{2}$ را رسم کرده مساحت بین آن را در مربع به ضلع یک داده‌شده پیدا می‌کنیم. *(سومی: برای این کار مساحت دو مثلث را از هم کم می‌کنیم.)*



داریم:

$$\text{مساحت پیش‌آمد} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2} - \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{72}$$

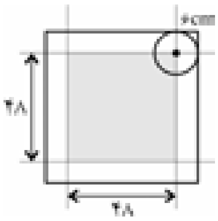
۲۴ ـ گزینه‌ی ۱ دمای اتاق A را روی محور افقی و دمای اتاق B را روی محور عمودی نمایش می‌دهیم. فضای نمونه‌ای مساحت مربع هاشورخورده است. اما پیش‌آمد موردنظر ما این است که اختلاف دماها دقیقاً برابر ۵ باشد؛ یعنی $|A-B|=5$ باشد. نقاط روی خط‌های $A-B=5$ و $A-B=-5$ که درون مربع خاکستری هستند، مشاهده می‌شود پیش‌آمد موردنظر ما! در واقع طول قطر مربع. فضای نمونه‌ای از جنس سطح و پیش‌آمد موردنظر از جنس طول است، بنابراین احتمال وقوع پیش‌آمد موردنظر **صفر** است.



(سومی: حسابی رفتید سرکارا نه؟! :D)

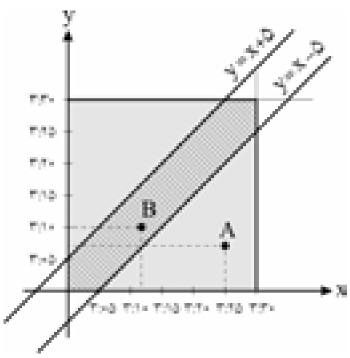
۲۵ ـ گزینه‌ی ۴ سؤال لوسی است واقعاً. بدیهی است که از میان بی‌شمار عدد حقیقی در بازه‌ی $[0,9]$ احتمال این‌که یکی از ۱۰ عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ...، ۹ را انتخاب کنیم **صفر** است.

۲۶ ـ گزینه‌ی ۲ می‌دانیم شعاع سکه برابر ۶ سانتی‌متر است. اگر بخواهیم کل سکه داخل مربع ما قرار بگیرد باید مرکز سکه دست‌کم ۶ سانتی‌متر از هر کدام از اضلاع فاصله داشته باشد. داریم:



$$P = \frac{48\times 48}{60\times 60} = \frac{16}{25}$$

۲۷ ـ گزینه‌ی ۳ خُب! خوش‌بختانه فضای کتاب کمی مؤمنانه شد! زمانی که محدثه می‌آید را روی محور افقی و زمانی که نجمه سر قرار می‌رسد را روی محور عمودی نشان می‌دهیم. مبدأ مختصات را ساعت ۳ فرض می‌کنیم و هر واحد را معادل پنج دقیقه می‌گیریم.



فضای نمونه‌ای مساحت مربع به ضلع ۳۰ است. چرا که هر نقطه‌ی آن نشان‌دهنده‌ی زمان‌هایی است که محدثه و نجمه سر قرار رسیده‌اند. *(سومی: مثلاً نقطه‌ی A عضوی از فضای نمونه‌ای است که با توجه به مختصات آن درمی‌یابیم محدثه ساعت ۳:۲۵′ و نجمه ساعت ۳:۰۶′ رسیده‌اند.)* اما پیش‌آمد موردنظر ما آن است که هیچ‌کدام بیش‌تر از پنج دقیقه معطل دیگری نباشند؛ یعنی اختلاف زمان‌های آمدن‌شان کم‌تر از پنج دقیقه شود یا به عبارت دیگر $|x-y|\le 5$ باشد. پیش‌آمد موردنظر فضای بین دو خط است. *(سومی: مثلاً نقطه‌ی B نشان‌دهنده‌ی این است که محدثه ۳:۱۲′ و نجمه ۳:۱۰′ رسیده‌اند که طبیعتاً زمان منتظر شدن نجمه کم‌تر از ۵ دقیقه است.)*

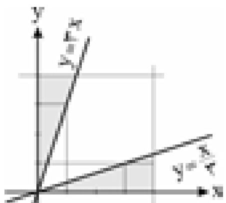
$$|x-y|\le 5 \Rightarrow \begin{cases} x-y\le 5 \Rightarrow y\ge x-5 \\ y-x\le 5 \Rightarrow y\le x+5 \end{cases}$$

داریم:

$$P = \frac{900 - 25\times 25}{900} = \frac{275}{900} = \frac{11}{36}$$

(سومی: برای محاسبه‌ی مساحت مربوط به پیش‌آمد، مساحت دو مثلث را از مساحت مربع کم کرده‌ایم.)

۲۸ ـ گزینه‌ی ۱ برخلاف صورت به ظاهر پیچیده‌ی این سؤال پاسخ‌دادن به آن بسیار آسان است. فضای نمونه‌ای نقاط داخل یک کره است *(سومی: یعنی از جنس حجم)* و پیش‌آمد موردنظر، نقاط روی یک صفحه است *(سومی: یعنی از جنس سطح)* بنابراین احتمال وقوع پیش‌آمد موردنظر برابر **صفر** است.
(سومی: تا باشه از این سؤالوای سرِکاری!!)



۲۹ ـ گزینه‌ی ۱ دو عدد را x و y می‌نامیم. می‌دانیم که $0 \le x \le 4$ و $0 \le y \le 4$ است. بنابراین فضای نمونه‌ای مساحت مربعی به ضلع ۴ خواهد شد.

اما پیش‌آمد موردنظر مساحت قسمتی از این فضای نمونه‌ای است که $\frac{x}{y} > 3$ یا $\frac{y}{x} > 3$ باشد. داریم: $y > 3x$ یا $y < \frac{x}{3}$

واضح است که مساحت دو مثلث هاشورخورده برابر هم است برای آن‌که مساحت مثلث پایینی را به دست آوریم، باید طول دو ضلع قائمه را داشته باشیم. طول ضلع بزرگ‌تر که برابر ۴ است. برای پیدا کردن طول ضلع کوچک‌تر خط $y = \frac{x}{3}$ را با خط $x = 4$ قطع می‌دهیم. مختصات نقطه‌ی برخورد، $(4, \frac{4}{3})$ است، بنابراین طول ضلع کوچک‌تر $\frac{4}{3}$ است.

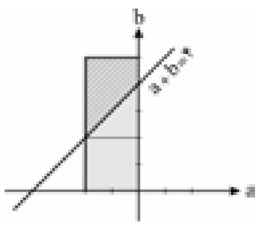
$$\text{مساحت مثلث پایینی} = \frac{4\times\frac{4}{3}}{2} = \frac{8}{3}$$

$$\text{مساحت قسمت هاشورخورده} = \frac{8}{3}\times 2 = \frac{16}{3}$$

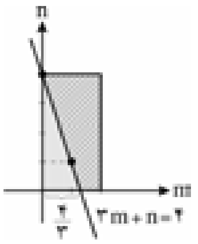
با یک تقسیم ساده داریم: $\Rightarrow P = \frac{\frac{16}{3}}{16} = \frac{1}{3}$

۳۰ ـ گزینه‌ی ۲

قرار است $a \in [-2,0]$ و $b \in [0,5]$ باشد. برای آن‌که بفهمیم قضیه از چه قرار است *(سومی: کدوم قضیه؟ با کی قرارداری ناقلا؟)* فرض کنید مثلاً $a = -1$ و $b = 1/5$ است. الآن فاصله‌ی دو نقطه a و b چه‌قدر است؟ واضح است که برابر ۲/۵ است به عبارت دیگر این فاصله برابر $b - a$ است.
به همین ترتیب a و b هر جای دیگری از این محور باشند نیز فاصله‌ی آن‌ها برابر $b - a$ است. حالا بپردازیم به حل سؤال!
با توجه به این‌که $a \in [-2,0]$ و $b \in [0,5]$ است، اگر a را روی محور افقی و b را روی محور عمودی نشان دهیم، فضای نمونه‌ای برابر است با مساحت مستطیل به‌وجودآمده. چون مختصات هر نقطه از این مستطیل نشان‌دهنده‌ی دو عدد b,a است *(سومی: طول نقطه a و عرض نقطه b را نشان می‌دهد.)*

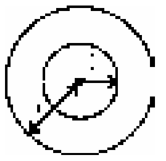


اگر بخواهیم $b - a > 4$ باشد، باید مساحت نقاط بالای خط $b - a = 4$ را در این فضای نمونه‌ای پیدا کنیم *(سومی: قسمت هاشورخورده)* داریم: $P = \frac{(\frac{1+3}{2})\times 2}{5\times 2} = 0/4$



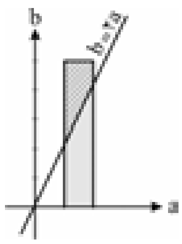
۳۱ ـ گزینه‌ی ۳ m را روی محور افقی و n را روی محور عمودی نمایش می‌دهیم. فضای نمونه‌ای مساحت مستطیل به‌وجودآمده و پیش‌آمد موردنظر نقاط بالای خط $3m + n = 4$ است. داریم:

$$P = \frac{2\times 4 - \frac{4\times\frac{4}{3}}{2}}{2\times 4} = \frac{2}{3}$$



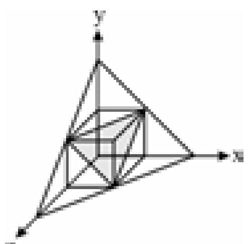
۳۲ ـ گزینه‌ی ۲ فضای نمونه‌ای حجم کره است اما پیش‌آمد موردنظر حجم کره‌ای هم‌مرکز با کره‌ی اصلی ولی به شعاع $\frac{r}{2}$ است. *(سومی: واضح است که نقاطی که درون کره‌ی کوچک‌تر هستند به مرکز کره نزدیک‌ترند تا به سطح آن.)* داریم:

$$P = \frac{V_{\text{کره‌ی کوچک}}}{V_{\text{کره‌ی بزرگ}}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\frac{r}{2})^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{8}$$



۳۳ ـ گزینه‌ی ۲ خُب! این سؤال هم شبیه یکی از سؤال‌های تمرین کتاب درسی جبر و احتمال است. دوباره طبق معمول با دو متغیر سروکار داریم. *(سومی: چیه؟ بیش‌تر دوست داری؟)* a را روی محور افقی و b را روی محور عمودی انتخاب می‌کنیم و دوباره همان داستان‌ها *(سومی: منظورش اینه که فضای نمونه‌ای می‌شه مساحت مستطیل به‌وجودآمده.)* می‌دانیم $x = \frac{b}{a}$ است چون می‌خواهیم $x > 2$ باشد، باید $\frac{b}{a} > 2$ باشد؛ یعنی نقاط بالای خط $b = 2a$. داریم:

$$P = \frac{(\frac{1+3}{2})\times 1}{5} = \frac{2}{5} = 0/4$$

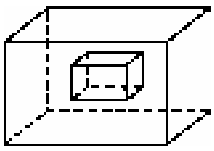


۳۴ ـ گزینه‌ی ۲ یک کمی البته این سؤال پیچیده است *(سومی: معنی‌اش این است که می‌خواهد پاسخش را یک کمی بپیچاند!)* *(پاسخ‌دهنده: مرگ!)* نقطه روی مثلث به‌وجود آمده از تقاطع صفحه‌ی $x + y + z = 1$ و محورهای مختصات قرار دارد.
بنابراین واضح است که فضای نمونه‌ای می‌شود مساحت مثلث به‌وجود آمده. اما اگر بخواهیم $x < \frac{1}{2}$ ، $y < \frac{1}{2}$ و $z < \frac{1}{2}$ باشد نقطه موردنظر باید داخل مکعب نشان‌داده‌شده باشد. *(سومی: این که پیچاند! حالا من یک کمی بیش‌تر توضیح برهم شاید بهتر بفهمید. قضیه این‌طوری است که اگر خطوط $x = \frac{1}{2}$ ، $y = \frac{1}{2}$ و $z = \frac{1}{2}$ را رسم کنیم و قسمت مشترک‌شان را در نظر بگیریم، شکل حاصل*

مکعبی به ضلع $\frac{۱}{۲}$ می‌شود که در شکل می‌بینید.) (پاسخ‌دهنده: ترکوندی الآن مثلاً با این توضیحت!؟) اما پیش‌آمد موردنظر چه‌گونه است؟ ببینید عزیزان من، دانش‌آموز خوب است بداند که پیش‌آمد همیشه زیرمجموعه‌ی فضای نمونه‌ای است.

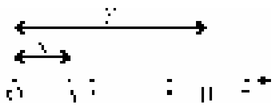
بنابراین پیش‌آمد ما حتماً باید بخشی از مثلث به‌وجودآمده باشد. اما از طرف دیگر باید درون آن مکعب هم باشد. بنابراین پیش‌آمد مورد نظر ما قسمت‌های مشترک صفحه و مکعب است یا به عبارت دیگر محل تقاطع صفحه با مکعب *(سومی: خوب گفتی فدای این جاش رو. راست می‌گی محل تقاطع می‌شه مساحت مثلث خاکستری)* حالا مساحت این مثلث خاکستری چه کسری از مساحت مثلث اصلی است؟ چون وسط‌های اضلاع مثلث اصلی به هم وصل شده، اگر از آقای تالس بپرسید مساحت مثلث هاشورخورده چه کسری از مساحت مثلث اصلی است، به شما می‌گوید: «*معلومه دیگه*، $\frac{۱}{۴}$»

۳۵ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای حجم مکعب بزرگ‌تر و پیش‌آمد موردنظر حجم بین دو مکعب است. داریم:



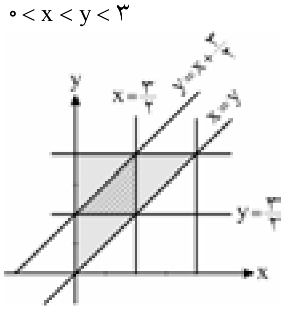
$$P=\frac{V_{\text{مکعب بزرگ}}-V_{\text{مکعب کوچک}}}{V_{\text{مکعب بزرگ}}}=\frac{۱۲۵-۸}{۱۲۵}=\frac{۱۱۷}{۱۲۵}=۰/۹۳۶$$

۳۶ ـ گزینه‌ی ۳ برای آن‌که پاره‌خط به سه قسمت تقسیم شود، باید دو نقطه روی این پاره‌خط در نظر بگیریم. فرض کنید نقطه‌ای را که به صفر نزدیک‌تر است A و نقطه‌ای که به ۳ نزدیک‌تر است را B بنامیم. اگر در شکلی که می‌بینید OA را برابر x و OB را برابر y فرض کنیم، طول سه پاره‌خط به وجود آمده x، $y-x$ و $۳-y$ است



با توجه به این‌که: $۰<x<y<۳$

فضای نمونه‌ای به همین ترتیب به دست می‌آید یعنی مساحت اشتراک رابطه‌های زیر:



$۰<x<۳$

$۰<y<۳$

$x<y$

در واقع فضای نمونه‌ای مساحت قسمتی است که خاکستری شده است. اما چه بخشی از این فضای نمونه‌ای مدنظر ماست؟ *(سومی: چی چه شماسة؟ مدنظر؟ یا بجز نظر یا $\sqrt{نظر}$؟)* قسمتی که در شرایط تشکیل مثلث صدق کند.

طول سه پاره‌خط کدام بود: $x\ ,\ y-x\ ,\ ۳-y$

می‌دانیم برای آن‌که سه پاره‌خط تشکیل مثلث بدهند، باید جمع هر دوتای آن‌ها از دیگری بیش‌تر باشد. نگاه کنید:

$$x+(y-x)>۳-y\Rightarrow y>\frac{۳}{۲}$$

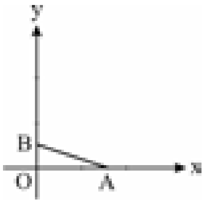
$$x+(۳-y)>y-x\Rightarrow y<x+\frac{۳}{۲}$$

$$(y-x)+(۳-y)>x\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

همان‌طور که در شکل مشخص است، پیش‌آمد موردنظر مساحت قسمت هاشورخورده است که واضح است $\frac{۱}{۴}$ سطح فضای نمونه‌ای است، پس:

$$P=\frac{۱}{۴}$$

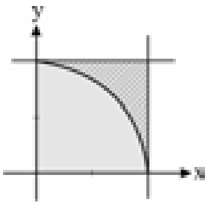
۳۷ ـ گزینه‌ی ۳ اگر طول OA برابر x و طول OB برابر y باشد طول AB برابر $\sqrt{x^۲+y^۲}$ است بنابراین انگار با چنین سؤالی مواجه هستیم:



«می‌دانیم $۰\le x\le ۲$ و $۰\le y\le ۲$ است. به چه احتمالی $\sqrt{x^۲+y^۲}>۲$ است؟»

خُب! حالا این را حلش می‌کنیم. *(سومی: یعنی من عاشق این جمله‌ی تو هستم! خوب شر گفتی حالا این را حل می‌کنی وگرنه کی می‌فهمید؟ مردم فکر می‌کردند حالا می‌خواهی راجع به جامعه‌ی مدنی و لزوم مبارزه‌ی مدنی مسالمت‌آمیز در یک جامعه‌ی توتالیتر حرف بزنی.)*

فضای نمونه‌ای برابر مساحت مربع به ضلع ۲ است. اما پیش‌آمد موردنظر قسمت‌هایی از این مربع است که در آن $\sqrt{x^۲+y^۲}>۲$ یا $x^۲+y^۲>۴$ باشد در واقع خارج دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ *(سومی: یعنی قسمت‌های هاشورفورده)*. داریم:



$$P=\frac{۴-\frac{\pi}{۴}\times ۴}{۴}=۱-\frac{\pi}{۴}$$

اگر نبود
این سه حرف
از لبان خاموش
دیگر چه واژه‌ای توانا بود
که آسودگی دهد
نام‌ها را
زیر آسمان کبود

رحمت حقی‌پور

Ǵƣ ƽ ƽ ū ƟƘǾ lj Ƙǽ Ʒ
ğƘǮƣ ƐƗ Ƿ ƸƜƩ Ƿ

کتاب آزمون

تهران
انتشارات علمی فار

راه‌نمای کتاب آزمون «گسسته و جبر و احتمالِ» انتشارات علمی فار

و به گوشِ دل
چه گفتی؟
که به خنده‌اش
شکفتی

مولانا

در کتابچه‌ی مشت نمونه‌ی خروار «آزمون گسسته»، ۳ بخش از آزمون‌های فصل احتمال را انتخاب کرده‌ایم.

کتاب آزمون گسسته‌ی انتشارات فار حدوداً ۳۰ تا آزمون دارد. هر فصل را به چند بخش تقسیم کرده‌ایم و هر بخش یک آزمون دارد؛ مثلاً فصل «گراف» دارای ۴ آزمون است و «نظریه‌ی اعداد» دارای ۶ آزمون و ... . مبحث‌های هر آزمون، مطابق کتاب آموزش‌مان از این همین انتشارات فار است. یعنی به ازای هر کدام از بخش‌های کتاب آموزش، یک آزمون داریم در این کتاب. پس بهتر است که وقتی یک بخش از کتاب آموزش را خوب یاد گرفتید، آزمون متناظر با آن بخش در این کتاب را بدهید. اگر هم کلاً حس می‌کنید درس‌تان خیلی خوب است و با کتاب‌های دیگری در درس گسسته مسلط شده‌اید، نیازی به کتاب آموزش فار ندارید. همین آزمون‌ها را بزنید.

آزمون‌ها استاندارد هستند. یعنی سعی کرده‌ایم که درجه‌ی سختی آن‌ها، دقیقاً مانند کنکور سراسری باشد. لطف می‌کنید و آزمون‌ها را، پس از تسلط بر مبحث و در زمان پیش‌نهادی می‌دهید.

فصل آخر این کتاب، فصل «آزمون‌های جامع» است. جایی که شما قرار است کل ریاضیات گسسته و جبر و احتمال را آموخته باشید و بخواهید قدرت‌تان را نشان دهید! این فصل شامل ۳ تا آزمون تألیفی و ۳ تا آزمون غیرتألیفی است. این ۳ آزمون آخر، شامل همه‌ی سؤال‌های کنکورهای سراسری و آزاد خارج از کشور می‌شوند. همه حس می‌کنند **خارج از کشور** خبر خاصی‌ست؛ پس شما هم از این قافله عقب نماید! این تست‌ها را هم که زدید، دیگر نباید نگران چیزی باشید قاعدتاً. اگر بودید، کاری از دست ما برنمی‌آید. یک قوری گل‌گاوزبان دم کنید و بنوشید. زندگی، اصلاً آن‌قدرها هم که فکرش می‌کنید، ارزش نگرانی و استرس‌های بی‌جا را ندارد.

پیروز باشید

۷ احتمال

فهرست:

شناسنامه ی فصل:

مهم‌ترین فصل این کتاب احتمال است! هم از لحاظ تعداد تست‌های کنکور هم از لحاظ این‌که درک انسان از احتمال، به زندگی‌اش معنا و مفهومی تازه می‌بخشد! شما لطف کنید و تست‌های این فصل را بزنید و در کنکور روسفیدمان کنید، درک تازه و این‌ها پیش‌کش! احتمال پیوسته که بخش ۳ از این فصل است، مربوط به کتاب جبر و احتمال است و خیلی هم مهم است. اگر فرصت کمی برای کنکور دارید، همین فصل احتمال را بخوانید برای کنکور!

	درصد میانگین تست‌های نظریه اعداد در کنکورهای ۵ سال گذشته
سراسری	۳۸٪
آزاد	۳۱٪

	آزمون ۱	آزمون ۲	آزمون ۳	آزمون ۴	آزمون کلی
تعداد	۲۰	۱۰	۱۰	۱۵	۴۰

بخش ۱
احتمال ساده و عملیات روی پیش‌آمدها

۳۰ دقیقه

۱ ـ متغیرهای «انتخاب عددی صحیح از بازه‌ی $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$» و «انتخاب عددی حقیقی از بازه‌ی $(۱,۲)$» به‌ترتیب:

۱) پیوسته و پیوسته‌اند.　۲) پیوسته و گسسته‌اند.
۳) گسسته و پیوسته‌اند.　۴) گسسته و گسسته‌اند.

۲ ـ در آزمایش پرتاب ۲ سکه:

۱) تعداد برآمدها و تعداد پیش‌آمدها برابر است.　۲) تعداد پیش‌آمدها ۲ برابر تعداد برآمدها است.
۳) تعداد پیش‌آمدها ۴ برابر تعداد برآمدها است　۴) تعداد پیش‌آمدها ۱۶ برابر تعداد برآمدها است.

۳ ـ در یک آزمایش، مجموعه‌ی $S=\{○,△,□\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{△,□\}$ و $B=\{○,□\}$ دو پیش‌آمد هستند. در این صورت کدام‌یک از پیش‌آمدهای زیر «نشدنی» است؟

۱) $A\cap B$　۲) $A-B$　۳) $B-A$　۴) $A'\cap B'$

۴ ـ در آزمایش پرتاب یک تاس می‌دانیم که پیش‌آمد «آمدن عدد اول» رخ داده است، اما پیش‌آمد «آمدن عدد زوج» رخ نداده است. در این صورت کدام‌یک از پیش‌آمدهای زیر حتماً رخ داده است؟

۱) آمدن مضرب ۳　۲) آمدن عدد بزرگ‌تر از ۳　۳) آمدن عدد فرد　۴) آمدن عدد زوج

۵ ـ در آزمایش پرتاب هم زمان ۳ سکه، پیش‌آمد آن‌که «دست‌کم دو سکه رو بیاید» شامل چند عضو است؟

۱) ۱　۲) ۲　۳) ۳　۴) ۴

۶ ـ در آزمایش پرتاب دو تاس، زوج مرتب $(۴,۶)$ عضوی از کدام‌یک از پیش‌آمدهای زیر نیست؟

۱) مجموع ۱۰ آمدن　۲) هر دو زوج آمدن
۳) یک تاس ۶ آمدن　۴) دست‌کم یک تاس کم‌تر از ۴ آمدن

۷ ـ فضای نمونه‌ای آزمایش «قراردادن دو عدد طبیعی متمایز در یک صفحه‌ی مربعی ۳×۳ خالی» دارای چند عضو است؟

۱) ۶　۲) ۸۱　۳) ۳۶　۴) ۷۲

۸ ـ چهار کارت روی یک میز قرار دارد که پشت آن‌ها اعداد ۱ تا ۴ نوشته شده است. یکی از کارت‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس به تعداد عدد نوشته‌شده در پشت آن، سکه پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای چنین آزمایشی دارای چند عضو است؟

۱) ۳۰　۲) ۴۸　۳) ۶۴　۴) ۹۸

۹ ـ فضای نمونه‌ای آزمایش «انتخاب ۳ نفر از میان ۵ دختر و ۵ پسر» دارای چند عضو است؟

۱) ۱۰　۲) ۲۰　۳) ۱۰۰　۴) ۱۲۰

۱۰ ـ در آزمایش پرتاب سه تاس، فضای نمونه‌ای دارای چند عضو با مؤلفه‌ی اول ۲ است؟

۱) ۳۶　۲) ۷۲　۳) ۹۶　۴) ۲۱۶

۱۱ ـ فضای نمونه‌ای آزمایش هم‌زمان پرتاب یک سکه، یک تاس و یک چهاروجهی که اعداد ۱ تا ۴ روی وجه‌های آن نوشته شده است، چند عضو دارد؟

۱) ۱۲　۲) ۲۴　۳) ۳۶　۴) ۴۸

۱۲ ــ از میان ۷ ایرانی و ۵ ژاپنی، سه نفر به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال دو نفر از آن‌ها ژاپنی هستند؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۷}{۱۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۲}$ ۴) $\frac{۷}{۲۲}$

۱۳ ــ یکی از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی {۱,۲,۳,۴,۵,۶} را به‌تصادف انتخاب کرده‌ایم. با کدام احتمال این زیرمجموعه ۳ عضوی و شامل ۱ است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۷}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵}{۳۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳۲}$

۱۴ ــ در یک نمایشگاه ماشین ۶ پژو و ۴ مزدا وجود دارد. به چه احتمالی از ۳ ماشین اولی که به فروش می‌روند، دست‌کم ۲ ماشین پژو است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۵ ــ از میان اعداد ۱ تا ۱۰ دو عدد متمایز به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این دو عدد به پیمانه‌ی ۷ هم‌نهشت باشند، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۱۵}$ ۲) $\frac{۲}{۱۵}$ ۳) $\frac{۱}{۴۵}$ ۴) $\frac{۲}{۴۵}$

۱۶ ــ مدیر، ناظم و ۶ معلم به‌تصادف دور یک میز گرد می‌نشینند. با کدام احتمال بین صندلی‌های مدیر و ناظم فقط یک صندلی فاصله وجود دارد؟

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۲}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۲}{۷}$

۱۷ ــ ۷ کبوتر شامل A و B روی یک درخت نشسته‌اند. این کبوترها یکی‌یکی و به‌تصادف شروع به پرواز می‌کنند. احتمال آن‌که کبوتر A زودتر از کبوتر B بلند شود، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۷}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$

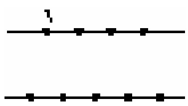
۱۸ ــ یک عدد سه‌رقمی با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌تصادف ساخته شده است. (تکرار ارقام مجاز است.) احتمال آن‌که رقم یکان و صدگان آن برابر باشد، چه‌قدر است؟

۱) ۰/۰۴ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۱ ۴) ۰/۲

۱۹ ــ یک سکه را چهار بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که «دو رو» یا «دو پشت» پشت سر هم نیاید، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۲۰ ــ ۹ نقطه مطابق شکل، روی دو خط موازی قراردارند. یک مثلث به‌تصادف با این نقاط رسم می‌کنیم. احتمال آن‌که یکی از رأس‌های مثلث A باشد، کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۳}{۱۴}$ ۴) $\frac{۵}{۱۴}$

پاسخ‌های بخش ۱

۱ ـ گزینه‌ی ۳ اعداد صحیح بازه‌ی $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ این‌ها هستند: $\{-1,0,1\}$ انتخاب یک عدد صحیح از این اعداد، یک متغیر گسسته است. چون تعداد روش‌های انتخاب، برابر یک عدد طبیعی می‌شود.
ولی «انتخاب عددی حقیقی از بازه‌ی $(1,2)$» یک متغیر پیوسته است. چرا؟ چون فضای نمونه‌ای انتخاب‌مان اعداد حقیقی است. پس پاسخ درست این است: «**گسسته و پیوسته‌اند**»

۲ ـ گزینه‌ی ۳ می‌دانیم **به هر عضو فضای نمونه‌ای برآمد یا حالت می‌گویند**. در پرتاب دو سکه، فضای نمونه‌ای دارای $2\times2=4$ عضو است. پس تعداد برآمدها برابر ۴ است. هم‌چنین **به هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای پیش‌آمد می‌گوییم**. پس تعداد پیش‌آمدهای این فضای نمونه‌ایِ ۴ عضوی برابر $2^4=16$ است. پس خواهیم داشت:

$$\frac{\text{تعداد پیش‌آمدها}}{\text{تعداد برآمدها}}=\frac{2^4}{4}=\frac{16}{4}=4$$

۳ ـ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم **یک پیش‌آمد وقتی نشدنی است که برابر مجموعه‌ی $\varnothing$ (تهی) باشد.** باید ببینیم کدام مجموعه برابر $\varnothing$ می‌شود:

۱	$A\cap B=\{\square\}\neq\varnothing$	×
۲	$A-B=\{\triangle\}\neq\varnothing$	×
۳	$B-A=\{\bigcirc\}\neq\varnothing$	×
۴	$A'\cap B'=\{\bigcirc\}\cap\{\triangle\}=\varnothing$	✓

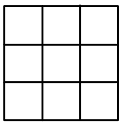
۴ ـ گزینه‌ی ۳ وقتی می‌گوییم **یک پیش‌آمد رخ داده است که حداقل یکی از اعضای آن، حاصل آزمایش باشد.** پس اگر در پرتاب یک تاس پیش‌آمد «آمدن عدد اول» رخ داده باشد، حاصل آزمایش باید یکی از عددهای ۲، ۳ و یا ۵ باشد.
هم‌چنین اگر «آمدن عدد زوج» رخ نداده باشد، تاس حتماً عددی فرد آمده است. با توجه به دو نتیجه‌گیری بالا، تاس یا ۳ آمده است یا ۵.
اگر تاس ۳ آمده باشد، پیش‌آمدهای گزینه‌های ۲ و ۴ رخ نداده است. اگر تاس ۵ آمده باشد پیش‌آمدهای گزینه‌های ۱ و۴ رخ نداده است. پس تنها پیش‌آمدی که حتماً رخ داده است، پیش‌آمد گزینه‌ی ۳ یا همان «**آمدن عدد فرد**» است.

۵ ـ گزینه‌ی ۴ عضوهای پیش‌آمد «دست‌کم دو سکه رو بیاید» را در پرتاب ۳ سکه می‌نویسیم:

$\underbrace{(\text{ر، ر، ر})}_{\text{۳ سکه «رو» بیاید}}\ ,\ \underbrace{(\text{ر، ر، پ})\,,\,(\text{ر، پ، ر})\,,\,(\text{پ، ر، ر})}_{\text{۲ سکه «رو» بیاید}}$

پس با یک **پیش‌آمد ۴ عضوی** روبه‌رو هستیم!

۶ ـ گزینه‌ی ۴ در زوج مرتب $(4,6)$ هیچ‌کدام از دو عدد ۴ و ۶ «کم‌تر از ۴» نیستند. پس این زوج مرتب عضوی از پیش‌آمد «**دست‌کم یک تاس کم‌تر از ۴ بیاید**» نیست.



۷ ـ گزینه‌ی ۴ یک صفحه‌ی مربعی 3×3 داریم که دارای ۹ جای خالی است. عدد اول را به ۹ طریق می‌شود در یکی از این ۹ جای خالی قرارداد. پس از قراردادن عدد اول، ۸ خانه‌ی خالی دیگر باقی می‌ماند.
پس عدد بعدی را به ۸ طریق می‌توانیم در جاهای خالی باقی‌مانده قرار دهیم. طبق «اصل ضرب» به $9\times8=72$ طریق می‌توانیم این کار را بکنیم.
پس تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای این آزمایش برابر است با:

$n(S)=9\times8=\mathbf{72}$

(سومی؛ به کلمه‌ی «متمایز» دقت داشته باشید!)

۸ ـ گزینه‌ی ۱ کارت ممکن است ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد. پس داریم:

کارت:
- $1 \xrightarrow{\text{۱ سکه}} 2$
- $2 \xrightarrow{\text{۲ سکه}} 2^2=4$
- $3 \xrightarrow{\text{۳ سکه}} 2^3=8$
- $4 \xrightarrow{\text{۴ سکه}} 2^4=16$

جمع این حالت‌ها، تعداد کل عضوهای فضای نمونه‌ای را به ما می‌دهد:

$n(S)=2+4+8+16=\mathbf{30}$

۹ ـ گزینه‌ی ۴ چون ما اصلاً تبعیض جنسیتی را قبول نداریم *(سومی: اصلاً و ابداً توی کشورمان هم چنین چیزی نداریم!)* ۵ دختر و ۵ پسر را در مجموع ۱۰=۵+۵ انسان در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم ۳ نفر از این ۱۰ نفر را انتخاب کنیم. پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر می شود با:

$$\binom{10}{3}=\frac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=\mathbf{120}$$

۱۰ ـ گزینه‌ی ۱ تاس اول عدد ۲ آمده است. پس سه‌تایی‌های مرتب فضای نمونه‌ای به این‌صورت هستند:

$$(2,6,6)$$

تاس دوم ۶ حالت   تاس سوم ۶ حالت

طبق «اصل ضرب» فضای نمونه‌ای دارای **۳۶**=۶×۶ عضو است.

۱۱ ـ گزینه‌ی ۴ با پرتاب هم‌زمان ۳ شیء روبه‌رو هستیم. از «اصل ضرب» استفاده می‌کنیم:

چهاروجهی   تاس   سکه

$$4\times6\times2=\mathbf{48}$$

۱۲ ـ گزینه‌ی ۴ در مجموع ۱۲=۷+۵ نفر آدم داریم! قرار است ۳ نفر را انتخاب کنیم. داریم:

$$n(S)=\binom{12}{3}=\frac{\cancel{12}^{2}\times11\times10}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=220$$

می‌خواهیم از این ۳ نفر، ۲ نفر ژاپنی باشند و ۱ نفر ایرانی. داریم:

$$\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{۲ تا ژاپنی}}\times\underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{۱ ایرانی}}=10\times7=70$$

طبق تعریفِ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ داریم: $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{70}{220}=\mathbf{\frac{7}{22}}$

۱۳ ـ گزینه‌ی ۳ تعداد کل زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ۶ عضویِ $\{1,2,3,4,5,6\}$ برابر 2^6 است. پس: $n(S)=2^6=64$

تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی شامل «۱» را می‌خواهیم: $\{1,\bigcirc,\bigcirc\}$ باید از ۵=۱−۶ عضو باقی‌مانده، ۲ عضو برای دایره‌های بالا انتخاب کنیم. پس خواهیم داشت: $n(A)=\binom{5}{2}=\frac{5\times4}{2}=10$

با تقسیم $n(A)$ بر $n(S)$ احتمال به دست می‌آید:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{64}=\mathbf{\frac{5}{32}}$$

۱۴ ـ گزینه‌ی ۲ در کل ۱۰=۴+۶ ماشین داریم. فضای نمونه‌ای «به فروش رفتن ۳ ماشین» است. پس:

$$n(S)=\binom{10}{3}=\frac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=\mathbf{120}$$

می‌خواهیم «دست‌کم ۲ ماشین از این ۳ ماشین پژو باشد.» داریم:

$$\underbrace{\binom{6}{2}}_{\text{۲ تا پژو}}\times\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{۱ مزدا}}\underbrace{+}_{\text{یا}}\underbrace{\binom{6}{3}}_{\text{۳ تا پژو}}=\frac{6\times5}{\cancel{2}}\times\cancel{4}^{2}+\frac{\cancel{6}\times5\times4}{\cancel{3}\times\cancel{2}}=60+20=80$$

در نتیجه: $n(A)=80$

طبق تعریف احتمال خواهیم داشت:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{80}{120}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

۱۵ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش، انتخاب ۲ عدد متمایز از میان اعداد ۱، ۲، ... و ۱۰ است. پس:

$$n(S)=\binom{10}{2}=\frac{10\times9}{2}=45$$

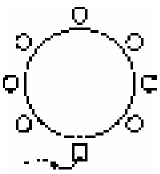
حالا حالت‌هایی را پیدا می‌کنیم که دو عدد به پیمانه‌ی ۷ هم‌نهشت باشند. *(سومی: در «نظریه‌ی اعداد» یادگرفتیم که دو عدد a و b وقتی به پیمانه‌ی m هم‌نهشت هستند که رابطه‌ی $a\overset{m}{\equiv}b\Leftrightarrow m\mid a-b$ برقرار باشد.)* داریم:

$$8\overset{7}{\equiv}1\Rightarrow\boxed{8,1}\qquad 9\overset{7}{\equiv}2\Rightarrow\boxed{9,2}\qquad 10\overset{7}{\equiv}3\Rightarrow\boxed{10,3}$$

در نتیجه خواهیم داشت: $n(A)=3$

در آخر هم همان تقسیم همیشگی:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{45}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$



۱۶ ـ گزینه‌ی ۴ شکل را ببینید. مدیر هر جایی که بنشیند، دو حالت برای ناظم وجود دارد که شرط «بین مدیر و ناظم فقط یک صندلی فاصله باشد» برقرار باشد. *(سومی: همان ۲ دایره‌ی هاشورخورده!)* در مجموع ۷ صندلی خالی دیگر هم وجود دارد. پس احتمال این اتفاق برابر می‌شود با: $P(A)=\mathbf{\frac{2}{7}}$

۱۷ ـ گزینه‌ی ۱ ببینید! کبوتر A و B اصولاً برتری خاصی که نسبت به هم ندارند. در ضمن چون کبوترها «یکی‌یکی» پرواز می‌کنند، نمی‌توانند «با هم» بلند شوند. در واقع در نیمی از حالت‌ها، A زودتر بلند می‌شود و در نیمی از حالت‌ها هم B زودتر بلند می‌شود. پس احتمال این‌که A زودتر بلند شود برابر است با: $P(\text{زودتر از } B\ A)=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(سومی: در واقع این سؤال مثل سؤالی است که «۷ نفر شامل A و B می‌خواهند در یک صف وارد هواپیما شوند. احتمال آن‌که A زودتر از B وارد شود چه‌قدر است؟» کل حالت‌هایی که ۷ نفر در یک صف می‌ایستند ۷! است. تعداد حالت‌هایی که A زودتر از B وارد می‌شود (مثلاً سمت راست B قرار دارد) برابر $\frac{7!}{2}$ است. احتمال موردنظر هم برابر $\frac{1}{2}$ می‌شود.)

۱۸ ـ گزینه‌ی ۴ ابتدا کل تعداد اعداد سه‌رقمی را که با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌شود ساخت، محاسبه می‌کنیم:

$$④⑤⑤ = 4\times5\times5 = 100 \Rightarrow n(S)=100$$

صفر نمی‌تواند باشد

$$④⑤① = 4\times5 = 20 \Rightarrow n(A)=20$$

صفر نمی‌تواند باشد

صدگان هرچه باشد، یکان هم باید همان رقم باشد پس انتخابی برای یکان نداریم.

احتمال خواسته‌شده برابر می‌شود با: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{20}{100}=0/2$

۱۹ ـ گزینه‌ی ۲ یک سکه را که چهار بار پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای دارای $2^4=16$ عضو می‌شود. پس: $n(S)=2^4=16$

چه حالت‌هایی هستند که «دو رو» یا «دو پشت» پشت سر هم نیاید؟ دو حالت داریم:

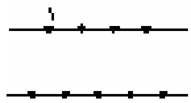
(ر، پ، ر، پ) , (پ، ر، پ، ر)

نه «دو رو» پشت سرهم هستند و نه «دو پشت»

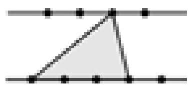
پس ۲ حالت داریم؛ یعنی: $n(A)=2$

در نهایت خواهیم داشت: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$

۲۰ ـ گزینه‌ی ۴ ابتدا ببینیم چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأس‌های آن نقطه‌های شکل روبه‌رو باشد. دو حالت وجود دارد:

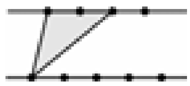


① یک رأس مثلث از خط بالا و ۲ رأس آن از خط پایین انتخاب شود:



$$\binom{4}{1}\binom{5}{2}=40$$

② ۲ رأس از خط بالا و یک رأس از خط پایین انتخاب شود:



$$\binom{4}{2}\binom{5}{1}=30$$

پس در مجموع $40+30=70$ نوع مثلث داریم؛ یعنی: $n(S)=70$

حالت مطلوب‌مان حالتی است که یک رأس مثلث A باشد. باز هم دو حالت پیش می‌آید:

① هر دو رأس از خط پایین انتخاب شوند: $\binom{5}{2}=10$

② یک رأس از خط بالا و یک رأس از خط پایین انتخاب شود:

$$\binom{3}{1}\binom{5}{1}=15$$

چون A از قبل انتخاب شده ۳ تا رأس قابل انتخاب در خط بالا داریم.

با جمع زدن این دو حالت خواهیم داشت: $n(A)=15+10=25$

با یک تقسیم ساده احتمال موردنظر را پیدا می‌کنیم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{25}{70}=\frac{5}{14}$$

تابستان خیلی بد شروع شده بود. «کوکی والس» اهل سین‌سیناتی آن بالا، در یک یخچال طبیعی روی خود بنزین ریخته و خودسوزی کرده بود. اما قبلاً نامه‌ای نوشته و از بچه‌ها خواسته بود که همه چیز را برای پدر و مادرش توضیح دهند. گرچه می‌بایست دانسته باشد که چنین چیزی غیرممکن است. چون پدر و مادرش می‌بایست پنجاه سالی داشته باشند. مگر می‌شود چیزی را برای آن‌ها توضیح داد؟ زندگی با همه‌ی واقعیاتش سال‌های سال تا مغز استخوان این‌ها رفته و چنان خیس خورده بود، که دیگر چیزی حس نمی‌کردند و دیگر هیچ‌جورنمی‌شد این چیزها را حالیشان کرد.

کوکی کاری کرده بود که کاملاً قابل فهم بود اما منطق آن قابل انتقال به دیگران نبود. این جور چیزها را نمی‌شود با کلمات بیان کرد. کلمات فقط دروغ می‌گویند. ولی «لچ گلس» پیش‌نهاد کرده بود که به پدر و مادر کوکی بگویند که پسرشان به قصد اعتراض دست به این کار زده است. اما نگویند اعتراض علیه چه چیز، زیرا کسی از عقاید سیاسی آن‌ها خبر نداشت. این کار را کردند اما وقتی تلگراف جواب قبولی به امضای خانم و آقای والاس رسید که:

«این تخم‌سگ علیه چه چیز اعتراض می‌کرد؟» همه هاج و واج می‌ماندند. باگ‌مورن تلگراف را دوباره خواند و گفت: «حالا بیا و درستش کن. از این تلگرام گند تضاد بین دو نسل توی دماغ می‌زند.» و حل و فصل قضیه را خود به عهده گرفت. آخر با «نسل» از بیخ مخالف بود. متن تلگرام جواب را به این شرح تهیه کرد: «پسر شما خودش را آتش زد تا علیه فندک نامرغوبی که به او فروخته بودند اعتراض(نقطه) مرگش بسیار دردناک(نقطه) به‌همین دلیل هنگام تسلیم جان فقط به یاد باباجان و مامان‌جانش بود(نقطه) از مامان جانش تقاضا می‌کنیم بیاید پای چپ تقریباً سالم مانده‌ی فرزندش را تحویل(نقطه) اطمینان داشته باشید جمعیت مبارزه برای بهبود فندک از فداکاری بچه‌ی شما نتیجه خواهد گرفت «امضا باگ مورن»

خداحافظ گری کوپر / رومن گاری

بخش ۲
پیش‌آمدهای ناسازگار و مستقل و ...

۱۵ دقیقه

۱ ــ در آزمایش پرتاب دو تاس، کدام پیش‌آمد با پیش‌آمد «مجموع دو عدد برابر ۷ شدن» ناسازگار است؟

۱) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۶ شدن
۲) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۸ شدن
۳) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۰ شدن
۴) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۲ شدن

۲ ــ اگر A و B دو پیش‌آمد از فضای نمونه‌ای S باشند به‌طوری‌که $P(A)=0/3$، $P(B)=0/7$ و $P(A\cup B)<1$، کدام گزینه درست است؟

۱) A و B حتماً سازگارند.
۲) A و B حتماً ناسازگارند.
۳) A و B حتماً متمم‌اند.
۴) A و B حتماً مستقل‌اند.

۳ ــ اگر A پیش‌آمد رو آمدن در پرتاب یک سکه و B پیش‌آمد مضرب ۳ آمدن در پرتاب یک تاس باشد، $P(A\Delta B)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) $\frac{2}{3}$
۴) $\frac{5}{6}$

۴ ــ دو پیش‌آمد مستقل A و B روی فضای نمونه‌ای ۱۰ عضوی S تعریف شده‌اند. اگر A دارای ۴ عضو و $P(B)=\frac{1}{2}$ باشد، $P(A\cup B)$ کدام است؟

۱) ۰/۶
۲) ۰/۷
۳) ۰/۸
۴) ۰/۹

۵ ــ سه تاس پرتاب می‌کنیم. احتمال آن‌که لااقل در یکی از پرتاب‌ها عدد رو شده کوچک‌تر از ۳ باشد کدام است؟

۱) $\frac{4}{27}$
۲) $\frac{8}{27}$
۳) $\frac{19}{27}$
۴) $\frac{23}{27}$

۶ ــ اگر A و B دو پیش‌آمد مستقل و غیرتهی باشند، حاصل $1-\frac{1}{P(B)}+\frac{1}{P(A)}$ کدام است؟

۱) $\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}$
۲) $\frac{P(A\cup B)}{P(A)}$
۳) $\frac{P(A\Delta B)}{P(A\cap B)}$
۴) $\frac{P(A\Delta B)}{P(A)}$

۷ ــ سه تیرانداز A و B و C به احتمال‌های ۰/۲ ، ۰/۳ و ۰/۵ به هدف می‌زنند. احتمال این‌که فقط یکی از آن‌ها به هدف بزند کدام است؟

۱) ۰/۲۷
۲) ۰/۲۸
۳) ۰/۴۷
۴) ۰/۴۸

۸ ــ یک تاس ناسالم طوری طراحی شده که در نصف دفعات پرتاب ۶ می‌آید. اگر شانس رخ دادن همه‌ی اعداد دیگر برابر هم باشد، احتمال رخ دادن عدد زوج در پرتاب این تاس کدام است؟

۱) $\frac{6}{10}$
۲) $\frac{65}{100}$
۳) $\frac{7}{10}$
۴) $\frac{75}{100}$

۹ ــ اگر فضای نمونه‌ای S دارای چهار عضو به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ باشد، به‌طوری‌که $P(\{a,b\})=0/7$ و $P(\{b,c,d\})=0/85$ کدام گزینه درست است؟

۱) $P(a)=0/2$
۲) $P(a)=0/25$
۳) $P(b)=0/5$
۴) $P(b)=0/55$

۱۰ ــ در یک مسابقه‌ی هوش ۵ ایرانی و ۳ عرب شرکت کرده‌اند. می‌دانیم احتمال برنده‌شدن ایرانی‌ها با هم برابر، هم‌چنین احتمال برنده‌شدن عرب‌ها نیز برابر هم است. اما احتمال برنده‌شدن هر ایرانی دو برابر احتمال برنده‌شدن هر کدام از عرب‌هاست. در این صورت احتمال آن‌که یک ایرانی مسابقه را ببرد چه‌قدر است؟

۱) $\frac{5}{8}$
۲) $\frac{7}{13}$
۳) $\frac{10}{13}$
۴) $\frac{11}{15}$

پاسخ‌های بخش ۲

۱ ـ گزینه‌ی ۲ دو پیش‌آمد ناسازگار پیش‌آمدهایی هستند که اشتراک آن‌ها تهی باشد. یعنی اگر A و B دو پیش‌آمد از فضای نمونه‌ای S باشند، اگر $A \cap B = \varnothing$ باشد، دو پیش‌آمد A و B را ناسازگار می‌نامند. حالا اول فضای نمونه‌ای پیش‌آمد «مجموع دو عدد برابر ۷ شدن» را در پرتاب دو تاس نشان می‌دهیم. هرکدام از گزینه‌ها که با فضای نمونه‌ای این پیش‌آمد اشتراکی نداشته باشد، با پیش‌آمد موردنظر ناسازگار است. داریم:

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

حالا فضای نمونه‌ای پیش‌آمد هرکدام از گزینه‌ها را نشان می‌دهیم:

۱) فضای نمونه‌ای حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۶ شدن:

$$B = \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\} \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$$

۲) فضای نمونه‌ای حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۸ شدن:

$$C = \{(2,4),(4,2)\} \Rightarrow A \cap C = \varnothing$$

پس پیش‌آمد این گزینه با پیش‌آمد صورت سؤال ناسازگار است.

۳) فضای نمونه‌ای حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۰ شدن:

$$D = \{(2,5),(5,2)\} \Rightarrow A \cap D \neq \varnothing$$

۴) فضای نمونه‌ای حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۲ شدن

$$E = \{(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\} \Rightarrow A \cap E \neq \varnothing$$

۲ ـ گزینه‌ی ۱ با استفاده از رابطه‌ی معروف و خیلی مهم $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ خواهیم داشت:

$$P(A \cup B) < 1 \Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) < 1$$

$$\xrightarrow{P(A)=0/3,\,P(B)=0/7} 0/3 + 0/7 - P(A \cap B) < 1$$

$$\Rightarrow 1 - P(A \cap B) < 1 \Rightarrow P(A \cap B) > 0$$

از $P(A \cap B) > 0$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ چون $P(A \cap B) = 0$ هیچ‌وقت رخ نمی‌دهد بنابراین با قطعیت می‌توان گفت که $A \cap B \neq \varnothing$ است و در نتیجه **دو پیش‌آمد A و B حتماً سازگارند**. *(سومی: از $P(A \cap B) > 0$ هیچ‌گاه نمی‌توان به صورت قطعی گفت که A و B حتماً متمم‌اند یا A و B حتماً مستقل‌اند. پس گزینه‌های ۳ و ۴ نمی‌توانند درست باشند)*

۳ ـ گزینه‌ی ۴ ابتدا تکلیف $P(A \Delta B)$ را مشخص کنیم. *(سومی: یعنی $P(A \Delta B)$ را با استفاده از روابط جبر مجموعه‌ها باز کنیم و ببینیم چه حرفی برای گفتن دارد!!)*

داریم:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) \Rightarrow P(A \Delta B) = P[(A \cup B) - (A \cap B)]$$

داریم:

$$P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{\text{احتمال رو آمدن در پرتاب یک سکه}} + \underbrace{P(B)}_{\text{احتمال مضرب ۳ آمدن در پرتاب یک تاس (احتمال این‌که تاس ۳ یا ۶ بیاید)}} - 2\underbrace{P(A \cap B)}_{\text{A و B مستقل‌اند: } P(A)P(B)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

۴ ـ گزینه‌ی ۲ $P(A \cup B)$ را می‌خواهیم. بنابراین باید $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ را حساب کنیم. چون **دو پیش‌آمد A و B مستقل هستند** می‌توانیم بنویسیم: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

بنابراین داریم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\xrightarrow[P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}]{P(B)=\frac{1}{2}} P(A \cup B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = 0/7$$

۵ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای در پرتاب ۳ تاس دارای $216 = 6^3 = 6 \times 6 \times 6$ حالت است. بنابراین $n(S) = 216$ می‌شود. برای این‌که احتمال رو شدن لااقل یک عدد کوچک‌تر از ۳ در پرتاب سه تاس را به‌دست آوریم، اول تعداد حالاتی که در پرتاب سه تاس اصلاً عدد کوچک‌تر از ۳ رخ ندهد را محاسبه می‌کنیم. *(سومی: این حالت، متمم حالت لااقل آمدن یک عدد کوچک‌تر از ۳ در پرتاب سه تاس می‌باشد.)* داریم:

$$\underbrace{n(A')}_{\text{تعداد حالت‌هایی که فقط اعداد } \{3,4,5,6\} \text{ در پرتاب ۳ تاس رخ دهد}} = 4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64 \xrightarrow{n(S)=216} P(A') = \frac{n(A')}{n(S)}$$

$$= \frac{64}{216} = \frac{8}{27}$$

بنابراین احتمال رخ دادن لااقل یک عدد کوچک‌تر از ۳ در پرتاب سه تاس برابر است با: $P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۸}{۲۷}=\mathbf{\frac{۱۹}{۲۷}}$

۶ ـ گزینه‌ی ۱ A و B دو پیش‌آمد مستقل و غیرتهی هستند. یعنی:

$$\text{I}\quad P(A\cap B)=P(A)P(B)\neq ۰$$

حالا حاصل عبارت داده‌شده در تست را به دست می‌آوریم:

$$K=\frac{۱}{P(A)}+\frac{۱}{P(B)}-۱=\frac{P(B)+P(A)-P(A)P(B)}{P(A)P(B)}\xrightarrow{\text{I}}$$

$$K=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}{P(A\cap B)}\xrightarrow{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$K=\mathbf{\frac{P(A\cup B)}{P(A\cap B)}}$$

۷ ـ گزینه‌ی ۳ برای به‌دست‌آوردن احتمال این‌که فقط یکی از این سه تیرانداز به هدف بزند باید حاصل احتمال زیر را محاسبه کنیم:

$$P(\text{فقط یک تیرانداز به هدف بزند})=P(\text{A بزند و B و C نزنند})$$
$$+P(\text{B بزند و A و C نزنند})+P(\text{C بزند و A و B نزنند})$$
$$=P(A\cap B'\cap C')+P(B\cap A'\cap C')+P(C\cap A'\cap B')$$

می‌دانیم پیش‌آمد تیراندازی سه تیرانداز A و B و C مستقل از هم هستند. بنابراین داریم:

$$P(\text{فقط یک تیرانداز به هدف بزند})=P(A)P(B')P(C')$$
$$+P(B)P(A')P(C')+P(C)P(A')P(B')$$
$$\xrightarrow[P(A')=۰/۸,P(B')=۰/۷,P=(C')=۰/۵]{P(A)=۰/۲,P(B)=۰/۳,P(C)=۰/۵}$$
$$P(\text{فقط یک تیرانداز به هدف بزند})=۰/۲\times۰/۷\times۰/۵+۰/۳\times۰/۸\times۰/۵$$
$$+۰/۵\times۰/۸\times۰/۷=۰/۰۷+۰/۱۲۰+۰/۲۸۰=\mathbf{۰/۴۷}$$

۸ ـ گزینه‌ی ۳ این تاس در نصف دفعات پرتاب ۶ می‌آید. پس احتمال ظاهر شدن ۶ برابر $\frac{۱}{۲}$ است: $P(۶)=\frac{۱}{۲}$

احتمال رخ دادن بقیه عددها هم یکسان است. بنابراین داریم:

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)=\frac{۱}{۲}$$

احتمال رخ دادن این ۵ عدد با هم برابر است.

در نتیجه: $P(۱)=P(۲)=P(۳)=P(۴)=P(۵)=\frac{۱}{۱۰}$

برای این‌که عدد زوج ظاهر شود تاس باید ۲ یا ۴ یا ۶ بیاید. پس داریم:

$$P(\text{زوج})=P(۲)+P(۴)+P(۶)=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲}=۰/۷$$

۹ ـ گزینه‌ی ۴ دو احتمالی که در صورت سؤال آمده است را باز می‌کنیم:

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=۰/۷$$
$$P(\{b,c,d\})=P(b)+P(c)+P(d)=۰/۸۵$$

با جمع کردن دو رابطه‌ی به‌دست‌آمده خواهیم داشت:

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)+P(b)=۱/۵۵\quad \text{I}$$

با توجه به این‌که فضای نمونه‌ای S به صورت $S=\{a,b,c,d\}$ می‌باشد، داریم: $P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱\quad \text{II}$

با توجه به روابط I و II داریم: $۱+P(b)=۱/۵۵\Rightarrow \mathbf{P(b)=۰/۵۵}$

(سومی: البته با توجه به این‌که $P(a)+P(b)=۰/۷$ داریم: $P(a)=۰/۱۵$ که در گزینه‌ها نیست.)

۱۰ ـ گزینه‌ی ۳ ۵ ایرانی را I_1 تا I_5 و ۳ عرب را A_1 تا A_3 می‌نامیم. مجموع احتمال‌ها باید برابر ۱ بشود:

$$\underbrace{P(I_1)}_{۲x}+\underbrace{P(I_2)}_{۲x}+\cdots+\underbrace{P(I_5)}_{۲x}+\underbrace{P(A_1)}_{x}+\underbrace{P(A_2)}_{x}+\underbrace{P(A_3)}_{x}=۱$$
$$\Rightarrow ۱۰x+۳x=۱$$
$$۱۳x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۳}$$

احتمال این‌که یک ایرانی مسابقه را ببرد، یعنی یا I_1 یا I_2 یا ... یا I_5 برنده شود. داریم: $P(I_1)+P(I_2)+\cdots+P(I_5)=۱۰x=\mathbf{\frac{۱۰}{۱۳}}$

(طراح: البته اگر در واقعیت چنین مسابقه‌ای برگزار شود، به احتمال $\frac{۱۳}{۱۳}$ ایرانی‌ها برنده می‌شوند!) (سومی: نژادپرستی کلاً چیز خوبی نیست!)

چون سنگ‌ها صدای مرا گوش می‌کنی
سنگی و ناشنیده فراموش کنی
رگبار نوبهاری و خواب دریچه را
از ضربه‌های وسوسه مغشوش می‌کنی
دست مرا که ساقه‌ی سبز نوازش است
با برگ‌های مُرده هم‌آغوش می‌کنی
گم‌راه‌تر ز روح شرابی و دیده را
در شعله می‌فشانی و مدهوش می‌کنی
ای ماهی طلاییِ مرداب خون من
خوش باد مستیت که مرا نوش می‌کنی
تو دره‌ی بنفش غروبی که روز را
بر سینه می‌فشاری و خاموش می‌کنی
در سایه‌های فروغ تو بنشست و رنگ باخت
او را به سایه از چه سیه‌پوش می‌کنی

فروغ فرخزاد

بخش ۳

احتمال پیوسته

۱۵ دقیقه

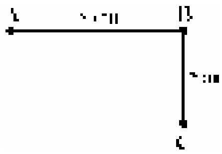
۱ ــ در آزمایش انتخاب دو عدد حقیقی از بازه‌ی [۰,۴] پیش‌آمد آن‌که هر دو عدد بزرگ‌تر از یک باشند، چه درصدی از فضای نمونه‌ای را اشغال می‌کند؟

۱) ۰/۳۱۲۵ ۲) ۰/۴۳۷۵ ۳) ۰/۵۶۲۵ ۴) ۰/۶۸۷۵

۲ ــ سه دایره‌ی هم‌مرکز به شعاع‌های ۱ و ۲ و ۳ در نظر بگیرید. نقطه‌ای به‌تصادف داخل دایره‌ی بزرگ‌تر انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این نقطه داخل دایره به شعاع ۲ و خارج دایره به شعاع ۱ قرار گرفته باشد، چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$ ۳) $\frac{\pi}{۹}$ ۴) $\frac{۲\pi}{۹}$

۳ ــ یک حلزون بر روی یک تکه چوب L مانند مطابق شکل روبه‌رو در حال حرکت است. احتمال آن‌که فاصله‌ی این حلزون از هر کدام از نقاط A ، B و C بیش‌تر از یک متر باشد کدام است؟



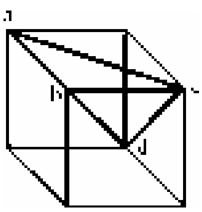
۱) $\frac{۴}{۷}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۱۱}{۱۴}$ ۴) $\frac{۱۲}{۱۴}$

۴ ــ در دایره‌ای به شعاع ۲ طول وتر AB برابر ۳ است. یک نقطه داخل دایره به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که این نقطه روی عمودمنصف وتر AB قرار داشته باشد کدام است؟

۱) صفر ۲) $\frac{۱}{۴\pi}$ ۳) $\frac{۱}{۸\pi}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۵ ــ نقطه‌ای به‌تصادف داخل مکعب روبه‌رو در نظر بگیرید. احتمال این‌که، این نقطه داخل چهاروجهی‌ای که رئوس آن a ، b ، c و d است قرار می‌گیرد چه‌قدر است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{۱}{۳}$

۳) $\frac{۱}{۶}$

۴) $\frac{۱}{۸}$

۶ ــ اگر $۲ \le x \le ۰$ ، $۵ \le y \le ۰$ و $x,y \in \mathbb{R}$ باشد، احتمال آن‌که $y - x \ge ۱$ باشد کدام است؟

۱) ۰/۴۵ ۲) ۰/۵ ۳) ۰/۵۵ ۴) ۰/۶

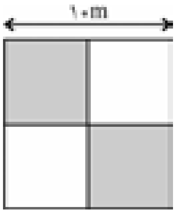
۷ ــ دو زاویه‌ی حاده‌ی A و B را در نظر بگیرید. به چه احتمالی مجموع این دو زاویه بیش از ۱۲۰° است؟

۱) $\frac{۱}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۹}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۳}$

۸ ــ اتوبوسی در ساعت‌های $۲:۱۵'$، $۲:۳۰'$ و $۲:۴۵'$ به ایستگاه می‌رسد. فردی بین $۲:۱۰'$ و $۲:۴۵'$ به ایستگاه می‌رسد. به چه احتمالی او کم‌تر از ۱۰ دقیقه معطل می‌ماند؟

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

۹ ـ سکه‌ای به شعاع ۲ را طوری روی صفحه‌ی شطرنجی روبه‌رو پرتاب می‌کنیم که مرکز سکه داخل صفحه بیفتد. به چه احتمالی کل سکه داخل مربع‌های سفید می‌افتد؟



۱) $\frac{۲}{۱۰۰}$

۲) $\frac{۴}{۱۰۰}$

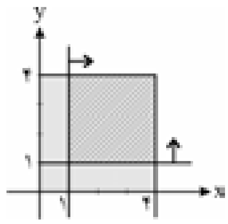
۳) $\frac{۸}{۱۰۰}$

۴) $\frac{۱۸}{۱۰۰}$

۱۰ ـ بابک قرار است بین ساعت ۱۲ تا ۲ و رضا قرار است بین ساعت ۱ تا ۴ در انتشارات حاضر شوند. به چه احتمالی رضا زودتر از بابک به انتشارات می‌رسد؟

۱) $\frac{۳}{۶}$ ۲) $\frac{۳}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

پاسخ‌های بخش ۳



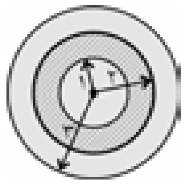
۱ ـ گزینه‌ی ۳ دو عدد را x و y می‌نامیم. می‌دانیم $۰ \le x \le ۴$ و $۰ \le y \le ۴$ است. بنابراین فضای نمونه‌ای مساحت مربعی به ضلع ۴ است. اگر بخواهیم هر دو عدد بزرگ‌تر از ۱ باشند باید $x > ۱$ و $y > ۱$ باشد. خط‌های $x = ۱$ و $y = ۱$ را رسم می‌کنیم و سمت راست و بالای آن را در نظر می‌گیریم.

(*سومی: قسمت هاشورخورده*) داریم: $P = \frac{۹}{۱۶} = ۰/۵۶۲۵$

(*سومی: این سؤال را با احتمال مستقل هم می‌شود جواب داد! احتمال آن‌که هریک از عددها، مستقل از دیگری، عضو بازه‌ی $[۰,۱]$ نباشند $\frac{۳}{۴}$ است بنابراین:*

$$P = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۱۶}$$

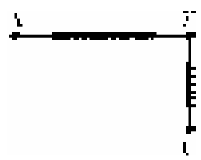
هر جوری که حس بهتری دارید جواب بدهید!)



۲ ـ گزینه‌ی ۱ با توجه به صورت سؤال درمی‌یابیم فضای نمونه‌ای مساحت دایره به شعاع ۳ و پیش‌آمد موردنظر قسمت هاشورخورده

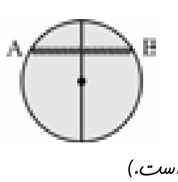
$$P = \frac{\pi \times (۲)^۲ - \pi}{\pi \times (۳)^۲} = \frac{۳\pi}{۹\pi} = \frac{۱}{۳}$$

است.



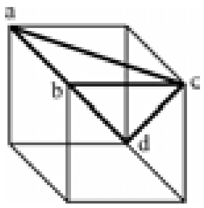
۳ ـ گزینه‌ی ۲ چه سؤال خوبی! (*سومی: چوب دوست داری!؟*) فضای نمونه‌ای طول چوب و پیش‌آمد موردنظر طول قسمت‌هایی از چوب است که از نقاط A و B و C بیش از یک متر فاصله دارند. (*سومی: قسمت‌های هاشورخورده*)

پس داریم: $P = \frac{۸ + ۲}{۱۰ + ۴} = \frac{۱۰}{۱۴} = \frac{۵}{۷}$



۴ ـ گزینه‌ی ۱ نظرتان چیست که فضای نمونه‌ای از جنس سطح و پیش‌آمد موردنظر از جنس طول است؟ (*سومی: منظورش اینه که فضای نمونه‌ای مساحت دایره و پیش‌آمد موردنظر طول عمودمنصف است.*)

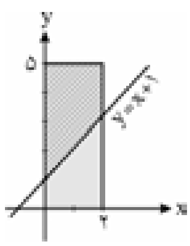
پس احتمال خواسته شده برابر **صفر** است.



۵ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای حجم مکعب است. اگر طول مکعب را برابر l فرض کنیم حجم چهاروجهی داده شده را برحسب l محاسبه می‌کنیم.

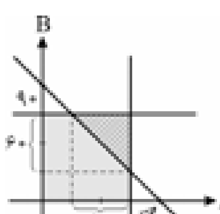
حجم چهاروجهی برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مساحت قاعده در ارتفاع. قاعده که مثلث abc است که با توجه به این‌که طول ضلع آن l است، مساحت برابر $\frac{l^۲}{۲}$ می‌شود. ارتفاع هم که برابر l است. بنابراین:

$$\left.\begin{aligned} V_{\text{مکعب}} &= l^۳ \\ V_{\text{چهاروجهی}} &= \frac{۱}{۳}\frac{l^۲}{۲} \times l \end{aligned}\right\} \Rightarrow P = \frac{۱}{۶}$$



۶ ـ گزینه‌ی ۴ می‌دانیم $۰ \le x \le ۲$ و $۰ \le y \le ۵$ فضای نمونه‌ای مساحت مستطیل به‌وجودآمده و پیش‌آمد موردنظر قسمت‌هایی از این مستطیل است که بالای خط $y = x + ۱$ است. چیه سومی!؟ منتظری الآن بگی: «قسمت‌های هاشورخورده»؟ آره قسمت‌های هاشورخورده!

داریم: $P = \frac{(\frac{۲+۴}{۲}) \times ۲}{۲ \times ۵} = ۰/۶$



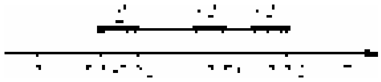
۷ ـ گزینه‌ی ۲ زاویه‌ی A را روی محور افقی و زاویه‌ی B را روی محور عمودی در نظر می‌گیریم. زاویه‌ها حاده‌اند، پس:

$۰ < A < ۹۰$, $۰ < B < ۹۰$

فضای نمونه‌ای مساحت مربع به‌وجودآمده است. اما اگر بخواهیم $A + B > ۱۲۰$ باشد باید مساحت نقاط بالای خط $A + B = ۱۲۰$ را پیدا کنیم.

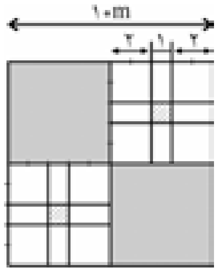
داریم: $P = \frac{\frac{۶۰ \times ۶۰}{۲}}{۹۰ \times ۹۰} = \frac{۲}{۹}$

۸ ـ گزینه‌ی ۳ فضای نمونه‌ای این مسئله، زمان رسیدن این آدم به ایستگاه اتوبوس است؛ یعنی بین ۲:۰۰ و ۲:۴۵. کل این فضا را روی محور می‌بینید. آن قسمت‌هایی که هاشورخورده است، زمان‌هایی را نشان می‌دهد که این آدم کم‌تر از ۱۰ دقیقه معطل می‌ماند.



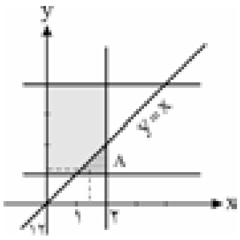
$$\Rightarrow P = \frac{۵+۱۰+۱۰}{۳۵} = \frac{۲۵}{۳۵} = \frac{۵}{۷}$$

۹ ـ گزینه‌ی ۱ فضای نمونه‌ای، مساحت کل صفحه‌ی شطرنجی است. اما اگر بخواهیم کل سکه داخل قسمت‌های سفید بیفتد، با توجه به این‌که شعاع سکه برابر ۲ است، باید مرکز سکه از هر کدام از اضلاع مربع‌های سفید اقلاً به اندازه‌ی ۲ واحد فاصله داشته باشد *(سومی: یعنی لااقل قسمت‌های هاشورخورده باشد!)* بنابراین:



$$P = \frac{۲}{۱۰۰}$$

۱۰ ـ گزینه‌ی ۴ بابک بین ۱۲ تا ۲ و رضا بین ۱ تا ۴ می‌رسد زمان رسیدن بابک را x و زمان رسیدن رضا را y فرض می‌کنیم. فضای نمونه‌ای مساحت مستطیل به وجود آمده است. *(سومی: برای توضیح بیش‌تر بد نیست بگوییم مثلاً نقطه‌ی A در این فضای نمونه‌ای معنایش آن است که بابک ۱:۲۰ و رضا ۱:۵۵ دقیقه رسیده‌اند.)* پیش‌آمد موردنظر زمانی است که $y < x$ باشد *(سومی: زیرا می‌خواهیم رضا زودتر برسد)* بنابراین باید قسمتی از فضای نمونه‌ای که زیر خط $y = x$ *(سومی: قسمت هاشورخورده)* است در نظر بگیریم. داریم:



$$P = \frac{\frac{۱}{۲}}{۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

نقاشان تنها هنرمندانی نبودند که کارشان در امپراتوری هیتلر با سخت‌گیری و خشونت مورد قضاوت قرار می‌گرفت. حتی پیش از آن‌که اتاق دستگاه فرهنگی رسماً برپا شود، هزاران دانش‌جو در برلین گرد آمدند و به نوشته‌ی ویلیام شایرر صحنه‌ای را به وجود آوردند که «از زمان قرون وسطای پسین در جهان غرب دیده نشده بود.» در یک آتش‌بازی عظیم، بیست هزار جلد کتاب سوزانده شد.

دانش‌جویان، که تحت تأثیر تبلیغات نازی درباره‌ی «دشمنان مردم آلمان» به هیجان آمده بودند، از فهرست کتاب‌هایی که مخرب تلقی می‌شد پیروی می‌کردند. بدین ترتیب این کتاب‌ها را از کتاب‌خانه‌ها (چه عمومی و چه خصوصی) در سرتاسر برلین بیرون کشیدند و به آتش سپردند.

اگر کتابی مروج دموکراسی یا آزادی، صلح، یا رواداری دینی بود مخرب به حساب می‌آمد. همه‌ی کتاب‌های مؤلفان یهودی نیز نامناسب برای مردم آلمان تلقی می‌شد. فهرست مؤلفانی که آثارشان آن شب سوزانده شد شبیه فهرست‌های توصیه شده برای مطالعه‌ی اکثر دبیرستان‌ها یا کالج‌های امروزی است.

کتاب‌های اندیشمندان بزرگ آلمانی نظیر توماس مان و آلبرت اینشتین سوزانده شد. اما فراوان بودند مؤلفان دیگری که آثار آن‌ها نیز خطرناک تلقی می‌شد ـ هلن کلر، اچ. جی. ولز، جک لندن، آپتون سینکلر، زیگموند فروید، و ارنست همینگوی چند نام از میان آن‌ها بودند.

هر چند گوبلز مستقیماً در این آتش‌بازی دخالت نداشت، کارش تنها ستودن دانش‌جویان مسبب این کار بود. او می‌گفت: «روح مردم آلمان دوباره می‌تواند ابراز وجود کند. این شعله‌ها نه‌تنها نمایانگر پایان قطعی یک عصر کهنه‌اند، بلکه عصر جدیدی را نیز نوید می‌دهند.»

ممکن است این سوال پیش آید که پس چه کتاب‌هایی مورد قبول گوبلز و همکارانش بودند. کتابی که در دوره‌ی امپراتوری هیتلر بیش از همه ترویج می‌شد «نبرد من» بود، خاطرات خشم‌گینانه‌ای که هیتلر در سال ۱۹۲۳ در زندان نوشته بود. به فرمان مخصوص هیتلر، هر خانه می‌بایست دست‌کم یک نسخه از آن را داشته باشد. زوجی که تقاضای گواهی ازدواج می‌کردند می‌بایست برای آن‌که ازدواجشان از طرف دولت قانونی شناخته شود این کتاب را می‌خریدند. تعجبی ندارد که بازار فروش کتاب گرم شد و هیتلر را میلیونر ساخت.

امپراتوری هیتلر / گیل بی استوارت